



Triplet pythagoricien

En arithmétique, un **triplet pythagoricien** ou **triplet de Pythagore** est un triplet (a, b, c) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation de Pythagore : $a^2 + b^2 = c^2$. Le triplet pythagoricien le plus connu est (3, 4, 5).

À tout triplet pythagoricien est associé un triangle de côtés entiers a, b, c , forcément rectangle d'hypoténuse c , ainsi qu'un rectangle de côtés entiers a, b , et de diagonale entière c .

Historique

La plus ancienne trace découverte de la connaissance de tels triplets remonterait à la tablette Plimpton 322, un document écrit vers 1800 av. J.-C. dans l'ancien Irak, qui fait apparaître 15 couples de nombres qui peuvent être complétés pour former ce qu'on appelle aujourd'hui des triplets pythagoriciens^{1,2}.

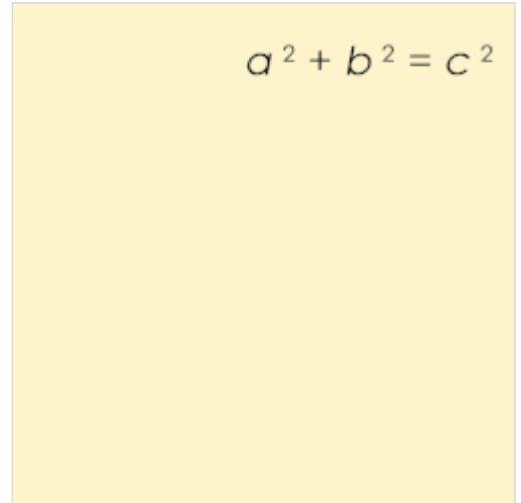
Mais les spécialistes ne sont pas tous d'accord, et d'autres interprétations de la tablette ont été proposées³.

Pythagore, au ^{vi}e siècle avant notre ère, n'a laissé aucun texte écrit et les sources diverses le concernant se contredisent. Il est cependant à peu près certain qu'il connaissait le triplet (3, 4, 5). Le philosophe Proclus de Lycie, au ^ve siècle de notre ère, dans son commentaire sur le livre I des Éléments d'Euclide (rédigé vers 300 avant notre ère), attribue à Pythagore la découverte de la formule générale que nous notons aujourd'hui $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$, où n est un entier strictement positif³.

Toujours d'après Proclus, Platon connaissait une deuxième famille infinie de triplets pythagoriciens : $(n^2 - 1, 2n, n^2 + 1)$ ³.

Cas général

Les deux formules connues des Grecs montrent qu'il existe une infinité de triplets pythagoriciens et que tout entier ≥ 3 fait partie d'un tel triplet (la première formule faisant intervenir $2n + 1$ et la deuxième $2n$).



Animation illustrant le plus simple triplet pythagoricien : $3^2 + 4^2 = 5^2$.



Tablette Plimpton 322.

Voici un théorème donnant une formule générant l'ensemble de ces triplets.

Théorème — Le triplet (a, b, c) est pythagoricien si et seulement s'il existe deux entiers $0 < q < p$ tels que

$$\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \text{ et } \frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}$$

La démonstration classique utilise une paramétrisation rationnelle du cercle unité⁴ :

Démonstration

Il est possible de paramétriser le cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$, privé du point A(−1, 0), à l'aide de la pente t de la droite passant par A et rencontrant le cercle en M(x, y). Les coordonnées de M sont alors :

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ et } y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

En effet, la pente de (AM) étant t , on a $y = t(x + 1)$ et l'équation du cercle s'écrit alors

$$x^2 - 1 + t^2(x + 1)^2 = 0$$

puis, après simplification par $x + 1$, non nul, et regroupement des termes on obtient :

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ puis } y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

De plus, x et y sont des rationnels strictement positifs si et seulement si t est un rationnel strictement compris entre 0 et 1.

Au triplet d'entiers strictement positifs (a, b, c) , on associe le point M de coordonnées $(a/c, b/c)$ rationnelles strictement positives. Le triplet (a, b, c) est pythagoricien si et seulement si le point M est un point du cercle unité. Cela se traduit par les conditions :

$$\frac{a}{c} = x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ et } \frac{b}{c} = y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

où t est un rationnel q/p strictement compris entre 0 et 1, ce qui conclut.

Cas des triplets primitifs

Un triplet pythagoricien (a, b, c) est dit « primitif » si les trois entiers a, b et c sont premiers entre eux dans leur ensemble. Il suffit pour cela que deux d'entre eux le soient (puisque'un diviseur premier commun à deux des nombres divisera le troisième).

Il existe une infinité de triplets primitifs (voir *infra*). Les 16 premiers par ordre croissant de c , avec $a < b$, sont ceux dont les trois termes sont inférieurs à 100^5 :

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| ▪ (3, 4, 5) | ▪ (20, 21, 29) | ▪ (11, 60, 61) |
| ▪ (5, 12, 13) | ▪ (12, 35, 37) | ▪ (16, 63, 65) |
| ▪ (8, 15, 17) | ▪ (9, 40, 41) | ▪ (33, 56, 65) |
| ▪ (7, 24, 25) | ▪ (28, 45, 53) | ▪ (48, 55, 73) |

- (13, 84, 85)
- (36, 77, 85)
- (39, 80, 89)
- (65, 72, 97)

Ces triplets mis bout à bout forment la suite A103606 de l'OEIS.

Tout triplet pythagoricien (a, b, c) est, de manière unique, produit d'un triplet pythagoricien primitif par un entier strictement positif : le pgcd de (a, b, c) .

Si l'on divise par c^2 , on obtient :

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Autrement dit, les triplets pythagoriciens primitifs correspondent biunivoquement aux points du cercle unité à coordonnées rationnelles donnés sous forme irréductible par $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$.

Théorème fondamental décrivant tous les triplets primitifs

Si (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif alors (b, a, c) aussi, et soit a soit b est impair, ces deux cas étant exclusifs. Le théorème suivant caractérise donc tous ces triplets.

Il y a équivalence^{6,7,8} entre

- (i) (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif avec a impair.
- (ii) Il existe un couple de nombres $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $p > q$, p et q premiers entre eux et de parités différentes, tels que

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq \quad \text{et} \quad c = p^2 + q^2.$$

Démonstration

D'après la forme générale des triplets pythagoriciens (voir supra), ceux qui sont primitifs sont les triplets de la forme

$$a = \frac{p^2 - q^2}{d}, \quad b = \frac{2pq}{d}, \quad c = \frac{p^2 + q^2}{d} \quad \text{avec} \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad 0 < q < p,$$

$$d = \text{pgcd}(p^2 - q^2, p^2 + q^2) \mid \text{pgcd}(2p^2, 2q^2)$$

et sans perte de généralité, p et q premiers entre eux, si bien que d est égal à 1 ou 2, selon que p et q sont de parités différentes ou de même parité.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si de plus a est impair alors p et q sont de parités différentes (car s'ils étaient tous deux impairs, a serait pair, comme quotient par $d = 2$ d'un entier divisible par 4). Il s'ensuit que $d = 1$, d'où (ii).
- (ii) $\Rightarrow$ (i) : Réciproquement, supposons (ii). Alors (a, b, c) est de la forme ci-dessus avec $d = 1$ et $a = \frac{p^2 - q^2}{1}$ impair, d'où (i).

Remarques :

- La famille $(p^2 - q^2, 2pq, p^2 + q^2)$ était connue d'Euclide³.

- Pour un triplet primitif (a, b, c) avec a impair, le couple (p, q) est unique :

$$p = \sqrt{\frac{a+c}{2}}, q = \sqrt{\frac{c-a}{2}}.$$

- Le cas $q = 1$ et p pair implique que tout nombre multiple de 4 : $2p \geq 4$ fait partie d'au moins un triplet primitif : $(p^2 - 1, 2p, p^2 + 1)$ (famille "de Platon" donnée ci-dessus).
- En posant $m = p + q$ et $n = p - q$, une reformulation de ce théorème est :

Théorème — (a, b, c) est un triplet pythagoricien primitif avec a impair si et seulement s'il existe deux entiers impairs premiers entre eux $m > n \geq 1$ tels que

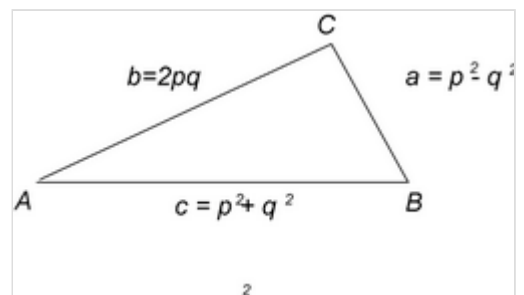
$$a = mn, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad \text{et} \quad c = \frac{m^2 + n^2}{2}.$$

- Le cas $n = 1$ implique que tout nombre impair $m \geq 3$ fait partie d'au moins un triplet primitif : $(m, (m^2 - 1)/2, (m^2 + 1)/2)$ (famille équivalente à celle de Pythagore donnée ci-dessus).

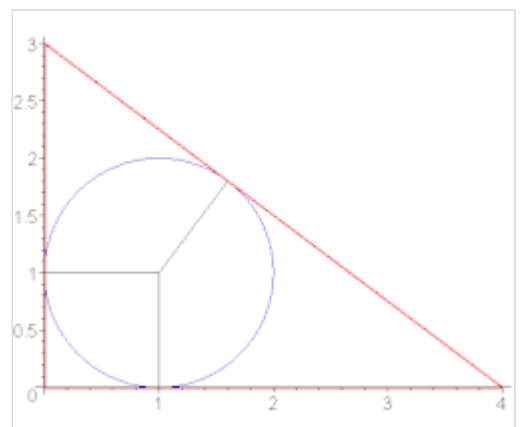
Propriétés d'un triplet pythagoricien primitif

Un triplet primitif (a, b, c) avec a impair, $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$, $c = p^2 + q^2$ donnés par le théorème précédent possède les propriétés suivantes :

- b est multiple de 4 (donc aucun entier de la forme $4k + 2$ n'appartient à un triplet pythagoricien primitif) ;
- un entier exactement parmi a et b est multiple de 3^9 ;
- un entier exactement parmi a , b et c est multiple de 5^9 ;
- la hauteur issue de l'angle droit dans le triangle associé, $h = ab/c$, n'est pas entière ;
- l'aire du triangle associé $S = ab/2$ (qui est par définition un nombre congruent) n'est pas un carré¹⁰ : c'est le théorème de Fermat sur les triangles rectangles³ ;
- il existe des triplets où a et c sont premiers, comme $(5, 12, 13)$, mais on ne sait pas s'il en existe une infinité¹¹ (cf. la suite [A067756](#) de l'OEIS) ;
- les facteurs premiers de c sont de la forme $4k + 1$, donc c également, comme pour toute somme impaire de deux carrés premiers entre eux ;
- réciproquement tout produit de nombres premiers de la forme $4k + 1$ est le troisième terme d'un triplet pythagoricien primitif (cf. la suite [A008846](#) de l'OEIS) ;
- $\frac{c-a}{2} = q^2$ et $c - b = (p - q)^2$ sont des carrés ;
- la réciproque de la propriété précédente est fausse comme le montre le triplet $(1, 8, 9)$: $(c - a)/2$ et $c - b$ sont des carrés alors que $(1,$



Triangle rectangle (ABC) associé au triplet (a, b, c)



Triangle $(3, 4, 5)$ avec son cercle inscrit de rayon 1.

8, 9) n'est pas un triplet pythagoricien ;

- au plus l'un des trois nombres a, b, c est un carré¹² ;
- les entiers a, b et c ne peuvent être simultanément des puissances n -ièmes avec $n \geq 2$ (conséquence du grand théorème de Fermat)

- les entiers p et q s'interprètent dans le triangle associé par la formule $\tan \frac{B}{2} = \frac{q}{p}$,

puisque $\tan B = \frac{2pq}{p^2 - q^2}$ (voir figure ci-contre) ; $\tan \frac{A}{2} = \frac{p+q}{q-p} = \frac{m}{n}$;

- le rayon du cercle inscrit est l'entier $r = \frac{ab}{a+b+c} = q(p-q)$; les rayons des trois

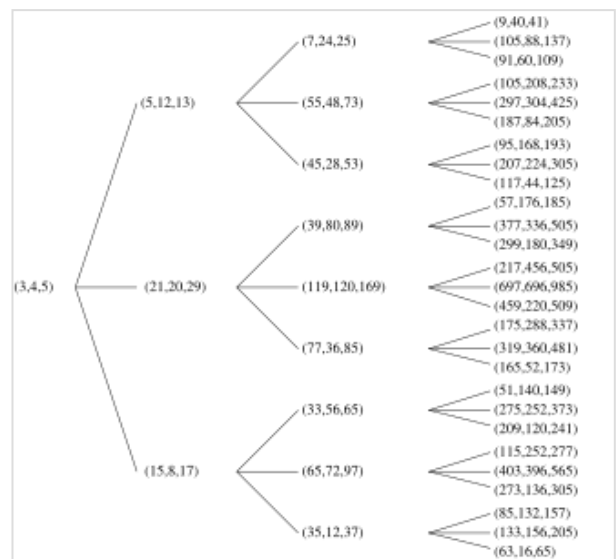
cercles exinscrits sont les entiers $r_A = \frac{ab}{-a+b+c} = p(p-q)$,

$r_B = \frac{ab}{a-b+c} = q(p+q)$ et $r_C = \frac{ab}{a+b-c} = p(p+q)$; par exemple pour le triplet (3, 4, 5), $p = 2$ et $q = 1$; les rayons successifs sont 1, 2, 3 et 6 ;

- le diamètre du cercle circonscrit est égal à c .

Génération algébrique et géométrique

Berggren¹³ a montré en 1934 que tout triplet pythagoricien primitif peut être obtenu à partir du triplet (3, 4, 5) par application répétée de $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$, avec :



Arbre de Berggren de construction des triplets pythagoriciens primitifs.

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathcal{R}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

selon la règle

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \mathcal{R}_i \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

De plus, cette décomposition est unique¹⁴.

Géométriquement, le produit de $\mathcal{R}_i$ par un triplet (a, b, c) correspond à la construction $\Phi \circ \mathcal{S}_i$ effectuée pour le point $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$, où³ :

- $\mathcal{S}_1$ est la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $\mathcal{S}_2$ est la symétrie de centre O ;
- $\mathcal{S}_3$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses ;
- et Φ est l'application du cercle unité (C) dans lui-même qui à tout point M associe M' le deuxième point d'intersection de (C) avec la droite passant par M et P(1,1).

Exemples

- $\begin{pmatrix} 77 \\ 36 \\ 85 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 85 \\ 132 \\ 157 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Moyennes du nombre de triplets pythagoriciens

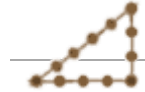
Le nombre $N_c(n)$ de triplets pythagoriciens primitifs de *troisième terme* inférieur ou égal à n est répertorié comme suite [A156685](#) de l'OEIS, et [Derrick Norman Lehmer](#) a montré en 1900¹⁵ que lorsque n tend vers l'infini, $N_c(n) \sim \frac{n}{2\pi}$; d'où un nombre moyen de tels triplets de troisième terme donné égal à $\frac{1}{2\pi} \approx \frac{1}{6}$; voir la suite [A086201](#) de l'OEIS.

Le nombre $N_s(n)$ de tels triplets de *somme* inférieure ou égale à n est répertorié comme suite [A328499](#) de l'[OEIS](#), et Lehmer a montré¹⁵ que $N_s(n) \sim \frac{\ln 2}{\pi^2} n$, d'où un nombre moyen de $\frac{\ln 2}{\pi^2} \approx \frac{2}{3}$; voir la suite [A118858](#) de l'[OEIS](#).

Applications

Corde à treize nœuds

Le triplet (3, 4, 5) intervient dans la corde à treize nœuds comportant 12 intervalles formant trois côtés de longueur 3, 4 et 5 et permettant d'obtenir un angle droit :



Carrés en progression arithmétique

Les triplets pythagoriciens (a, b, c) , $a < b$ sont en bijection naturelle avec les triplets (x^2, y^2, z^2) de carrés non nuls en progression arithmétique (vérifiant $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 > 0$, soit $x^2 + z^2 = 2y^2$, $x < z$).

On passe de (a, b, c) à (x, y, z) en posant $x = b - a$, $y = c$, $z = a + b$, et en sens inverse en posant $a = \frac{z - x}{2}$, $b = \frac{z + x}{2}$, $c = y$ ¹⁶.

En effet $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow (b - a)^2 + (a + b)^2 = 2c^2$.

Par exemple, le triplet (3, 4, 5) donne la progression ($1^2 = 1 < 5^2 = 25 < 7^2 = 49$) de raison 24, et le triplet (9, 40, 41) fournit la progression $31^2 < 41^2 < 49^2$ qui était connue de [Diophante](#)¹⁶.

La raison de la progression est égale à $2ab$, soit le quadruple de l'aire du triangle de Pythagore associé. Cette raison ne peut donc être un carré d'après le théorème de Fermat sur les triangles rectangles.

Fermat a conjecturé en 1640 dans une lettre à [Frénicle](#)¹⁷ qu'on ne peut trouver *quatre* carrés distincts en progression arithmétique, ce qui a été démontré par Euler en 1780^{17, 18}. Une démonstration par [Jean Itard](#) utilise les deux triplets pythagoriciens associés à une telle progression arithmétique et conclut par descente infinie^{19, 20, 21}. Voir aussi cette référence :²², ainsi que celle-ci : ^{23, 20}.

Problèmes de coloration

On peut considérer l'ensemble des entiers naturels comme un graphe dont les sommets sont les nombres et tels que les sommets reliés par une arête soient ceux qui font partie d'un même triplet pythagorien.

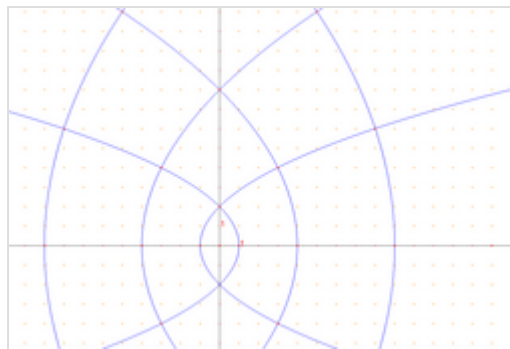
Dès lors, on se demande s'il est possible de colorier le graphe de telle sorte que les éléments d'un même triplet ne soient pas tous de la même couleur^{Note 1, 24}.

En d'autres termes on cherche à colorier le graphe de façon qu'il n'existe pas de 3-clique monochrome. Ce problème a initialement été posé par Paul Erdős et Ronald Graham³.

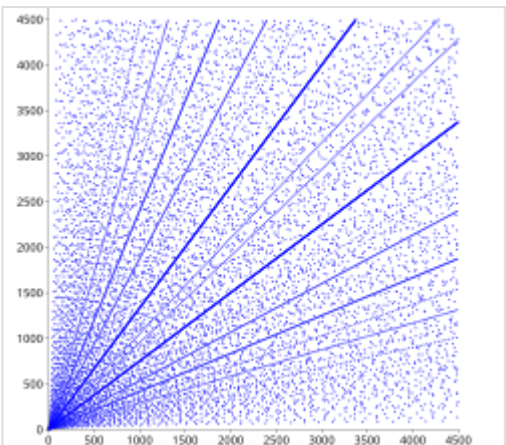
En se limitant à deux couleurs il a été montré en 2016, et vérifié en 2019 grâce à Rocq, qu'il n'est possible d'aller que jusqu'aux 7824 premiers entiers^{3, 25}.

En utilisant trois couleurs différentes, il existe un coloriage admissible pour les 11066 premiers entiers mais au-delà le problème reste ouvert³.

Une visualisation des triplets pythagoriciens



Visualisation des triplets associée à la fonction carré.



Nuage de points de tous les couples d'entiers (a, b) tels que $(a, b, \sqrt{a^2 + b^2})$ soit pythagoricien avec a et b inférieurs à 4 500.

La fonction complexe $z \mapsto z^2$ laisse stable l'anneau $\mathbf{Z}[i]$ des entiers de Gauss. À chaque point de l'image de $\mathbf{Z}[i]$ par cette fonction correspond un triplet pythagoricien (en effet, $(p + qi)^2 = p^2 - q^2 + 2pqi$, et $(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$. Cette remarque fournit une visualisation des triplets pythagoriciens²⁶ et une explication de la présence des paraboles dans le nuage de points ci-contre.

Problème connexe : les triplets d'Eisenstein

Portant le nom de Gotthold Eisenstein, en référence aux entiers d'Eisenstein²⁷, les triplets d'Eisenstein (en) sont des triplets vérifiant la relation suivante²⁸ :

Définition — Un triplet d'Eisenstein est un triplet (a, b, c) de trois nombres entiers naturels non nuls tels que :

- (a) : $a < c < b$ et le triangle de côtés de longueurs a, b, c possède un angle de 60° en C

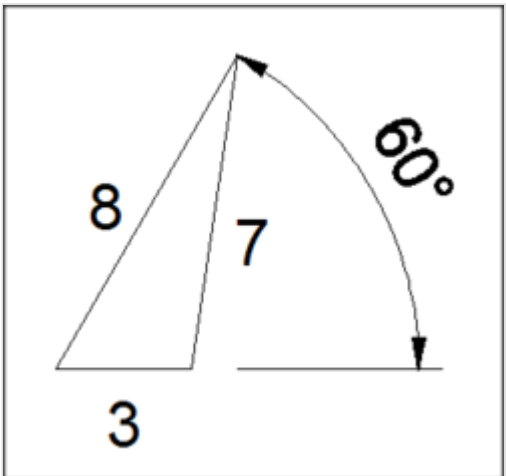


Illustration du triplet (3, 8, 7).

ou

- (b) : $a < b < c$ et le triangle de côtés de longueur a, b, c possède un angle de 120° en C

Notons que les triangles correspondant au cas (a) sont les triangles entiers dont les angles sont en progression arithmétique car $\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{C} \Leftrightarrow 180^\circ - \hat{C} = 2\hat{C} \Leftrightarrow \hat{C} = 60^\circ$.

On peut donner une version algébrique de cette définition grâce au théorème d'Al-Kashi (aussi appelé « loi des cosinus »), qui est une généralisation du théorème de Pythagore²⁹. Ce théorème relation relie la longueur d'un côté c d'un triangle aux longueurs a et b de ses deux autres côtés et au cosinus de l'angle $\hat{C}$ qu'ils forment :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

Ainsi, avec a, b, c des entiers nommés comme dans la définition ci-avant, et pour un angle de 60° ou 120° (dont le cosinus vaut respectivement $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$), l'égalité vérifiée sera respectivement : $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ ou $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

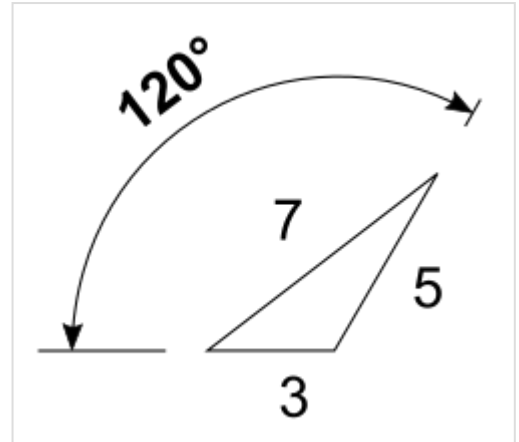


Illustration du triplet (3,5,7).

Par analogie avec la recherche de triplets pythagoriciens, qui revient à rechercher les entiers de Gauss dont la norme est un carré parfait, la recherche de triplets d'Eisenstein revient à chercher des entiers d'Eisenstein, $z = a + b\omega$ où $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{2\pi i/3}$, dont la norme $|a + b\omega|^2$ est un carré parfait³⁰.

Des triplets connus sont par exemple (la liste est non exhaustive) :

- Pour 60° : (3 , 8 , 7), (5 , 8 , 7), (5, 21, 19), (7, 15, 13), (7, 40, 37), (8 , 15 , 13), (9, 24, 21) : voir la suite A121992 de l'OEIS.
- Pour 120° : (3 , 5 , 7), (5 , 16 , 19), (7 , 8 , 13), (7, 33, 37), (9, 56, 61), (11, 24, 31) : voir la suite A264827 de l'OEIS

Notes et références

(en) Cet article est partiellement ou en totalité issu de l’article de Wikipédia en anglais intitulé « Pythagorean triple (https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple?oldid=968440563) » (voir la liste des auteurs (https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple?action=history)).

Notes

1. Pour les vingt premiers entiers un exemple d'une telle coloration est 1, 2, **3**, 4, 5, 6, 7, **8**, 9, 10, 11, **12**, **13**, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. On remarque par exemple que les triplets (**3**, 4, 5) et (5, **12**, **13**) ne sont effectivement pas monochromes.

Références

1. Goichot, « Tablette Plimpton 322 (<http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1265>) », sur *Le Portail des IREM*, 2016, revu par Christine Proust, 02/2017.
2. Christine Proust, « Plimpton 322 : à la recherche des rectangles sexagésimaux, une version mésopotamienne de la recherche des « triplets pythagoriciens » (<https://images.math.cnrs.fr/Trouver-toutes-les-diagonales.html>) », sur *Images des mathématiques*, 15 novembre 2015 (consulté en août 2020).
3. Jean-Paul Delahaye, « Dans les arcanes des triplets pythagoriciens », *Pour la science*, n° 514, août 2020, p. 80-85 (lire en ligne (<https://www.pourlascience.fr/sr/logique-calcul/dans-les-arcanes-des-triplets-pythagoriciens-19837.php>)).
4. Voir par exemple Pierre Guillot, *Cours de mathématiques L1*, TheBookEdition, p. 229 (<http://books.google.fr/books?id=Khc9lisTJiYC&pg=PA229>).
5. Gérard Villemin, « Quantité de triplets (<http://villemin.gerard.free.fr/TABLES/aaaPuiss/Triplet.htm#quantite>) », 15 mars 2020.
6. Jean Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui*, Hachette, 1988, 298 p. (ISBN 978-2-01-011950-7, OCLC 20000703 (<https://worldcat.org/fr/title/20000703>)), p. 94.
7. (en) Waclaw Sierpiński, *Pythagorean triangles*, Dover, 2003 (1^{re} éd. 1962) (lire en ligne (<http://books.google.com/books?id=LrLDAAQBAJ&pg=PA4>)), p. 4-7.
8. (en) John Stillwell, *Elements of Number Theory*, Springer, coll. « Undergraduate Texts in Mathematics », 2003 (lire en ligne (<https://books.google.com/books?id=LiAlZO2ntKAC&pg=PA112>)), p. 112.
9. Pour une démonstration, voir par exemple Sierpiński 2003, p. 4 ou cet [exercice corrigé](#) de la leçon d'arithmétique sur Wikiversité.
10. (en) R. D. Carmichael, *Diophantine Analysis*, 1915 (lire en ligne (<https://www.gutenberg.org/files/20073/20073-pdf.pdf>)), p. 13.
11. Sierpiński 2003, p. 6.
12. Carmichael 1915, p. 17 (Exercices : 1.).
13. (sv) B. Berggren, « Pytagoreiska trianglar », *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi*, vol. 17, 1934, p. 129-139.
14. André Stoll, « Générations géométrique et algébrique des triplets pythagoriciens », *L'Ouvrier*, n° 100-101, septembre 2000, p. 1 (lire en ligne (<https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST00012/IST00012.pdf>))
15. (en) D. N. Lehmer, « Asymptotic evaluation of certain totient sums », *Amer. J. Math.*, vol. 22, 1900, p. 293-335 (JSTOR 2369728 (<https://jstor.org/stable/2369728>)).
16. Marc Guinot, *Arithmétique pour amateurs, Pythagore, Euclide et toute la clique*, t. I, Aléas 1992, p. 156,157
17. (en) André Weil, *Number theory : an approach through history from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, 1984 (lire en ligne (https://www.google.fr/books/edition/Number_Theory/XSV0hDFj3loC?hl=fr&gbpv=1&dq=Number+Theory:+An+approach+through+history+from+Hammurapi+to+Legendre&printsec=frontcover)), p. 114-115
18. D'après Weil le problème a été traité par Euler en 1780 dans un article publié à titre posthume (Eu.I-5.56-60 dans E758) ; le texte est rédigé de manière quelque peu confuse, manifestement par ses assistants, à une époque où il était totalement aveugle.
19. Jean Itard, *Arithmétique et théorie des nombres*, PUF, coll. « Que sais-je ? » (n° 1093), 1973, p. 112-113
20. Claude Morin, « Au plus trois carrés en progression arithmétique », *Bulletin de l'UPS*, n° 290, printemps 2025 (lire en ligne (<https://mathcurve.com/Fermat%20bv290.pdf>))
21. Marc Guinot, *Arithmétique pour amateurs, les resveries de Fermat*, t. II, Aléas, 1993, p. 111-116

22. (en) Alf van der Poorten, « Fermat's Four Squares Theorem », *ArXiv*, 2007 (arXiv 0712.3850 (<https://arxiv.org/abs/0712.3850>), lire en ligne (<https://arxiv.org/pdf/0712.3850>))
23. (en) Russell Gordon, Sara Graham, « Coments on proofs that there are no four squares in arithmetic progression (<https://www.fq.math.ca/Papers1/53-1/GordonGraham09012014.pdf>) »
24. Shalom Eliahou et Jean Fromentin, « Pythagore et mixité (<https://images.math.cnrs.fr/Pythagore-et-mixite.html>) », sur *Images des mathématiques*, 21 juin 2017 (consulté en aout 2020).
25. (en) [vidéo] Numberphile, « The Problem with 7825 (<https://www.youtube.com/watch?v=1gBwexpG0lY>) », sur *YouTube*.
26. (en) « All possible pythagorean triples visualized (<https://www.youtube.com/watch?v=QJYmyhnaaek>) », sur *YouTube*.
27. Al Cuoco, *The Mathematics of Pleasing Problems: Mathematics Applied to Teaching*(archive (<https://web.archive.org/web/20060723174300/http://www2.edc.org/cme/showcase/slides.delaware.2006.pdf>)), Center for Mathematics Education, p. 27-28
28. « Sujet des olympiades nationales de mathématiques 2023. (https://www.pedagogie.ac-nantes.fr/medias/fichier/oam2023-acad-ntes_1688410623709-pdf) »  [PDF], sur *pedagogie.ac-nantes.fr* (consulté le 20 mars 2024), p. 3/6
29. Russel A. Gordon, « Properties of Eisenstein Triple », *Mathematics Magazine*, vol. 85, n° 1, 2012 (DOI 10.4169/math.mag.85.1.12 (<https://dx.doi.org/10.4169/math.mag.85.1.12>))
30. Al Cuoco et William McCallum, « The Double Continuity of Algebra », dans G.Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt et B. Xu, *nvited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs*, Springer, 2018 (DOI 10.1007/978-3-319-72170-5_4 (https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_4))

Voir aussi

Sur les autres projets Wikimedia :



Triplet pythagoricien (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Pythagorean_triplets?uselang=fr), sur Wikimedia Commons

- Le dernier théorème de Fermat qui montre que de tels triplets n'existent pas quand l'exposant de a , b , c est un entier supérieur ou égal à 3.
- Le théorème de Niven
- Les triplets de Markov
- Les briques d'Euler
- Les quadruplets pythagoriciens
- Les graphes diophantiens d'Erdős