



# Suite de Fibonacci

En mathématiques, la **suite de Fibonacci**, tirant son nom du mathématicien italien Fibonacci, est une suite de nombres entiers dans laquelle chaque nombre est la somme des deux nombres qui le précèdent. Elle commence par les nombres 0 et 1<sup>1</sup> puis se poursuit avec :

- 1 (comme somme de 0 et 1),
- 2 (comme somme de 1 et 1),
- 3 (comme somme de 1 et 2),
- 5 (comme somme de 2 et 3),
- 8 (comme somme de 3 et 5),
- etc.

Les termes de cette suite, c'est-à-dire les nombres apparaissant dans cette suite, sont appelés **nombres de Fibonacci**.

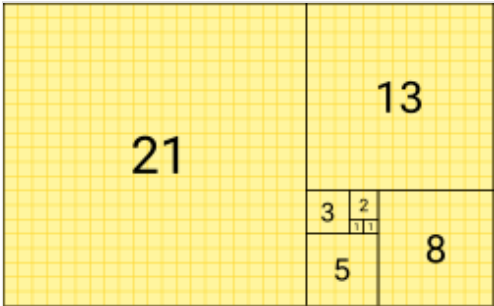
La suite de Fibonacci est répertoriée comme suite A000045 de l'OEIS.

Elle est liée au nombre d'or, noté  $\varphi$  (phi), qui intervient dans l'expression du terme général de la suite. Inversement, la suite de Fibonacci intervient dans l'écriture des réduites de l'expression de  $\varphi$  en fraction continue : les quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont les meilleures approximations du nombre d'or.

## Définition formelle

La suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ , et la relation de récurrence  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  pour  $n \geq 2$ . Le tableau suivant donne les 15 premiers termes de la suite de Fibonacci :

| $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ | ... | $F_n$               |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|---------------------|
| 0     | 1     | 1     | 2     | 3     | 5     | 8     | 13    | 21    | 34    | 55       | 89       | 144      | 233      | 377      | 610      | ... | $F_{n-1} + F_{n-2}$ |



Une juxtaposition de carrés dont les côtés ont pour longueur des nombres successifs de la suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 et 21.

Dans cet article, nous avons fait commencer la suite à  $n = 0$  avec  $F_0 = 0$ , comme le fait Édouard Lucas<sup>1</sup>. D'autres auteurs font débiter la suite à 1<sup>2</sup> :  $f_0 = f_1 = 1, f_2 = 2, f_3 = 3, f_4 = 5$ , etc. Le nombre  $F_n$  s'appelle parfois le  $n$ -ième nombre de Fibonacci<sup>2</sup> (bien qu'il soit techniquement le  $n+1$ -ième si on commence à 0).

# Histoire

## En Inde

Dans la branche des mathématiques concernant la combinatoire, les mathématiciens indiens s'intéressent à des problèmes de lexicographie et de métrique. Le mètre āryā (en) est composé de syllabes pouvant être brèves (de longueur un mātrā) ou longues (de longueur deux mātrās). La question est de savoir comment peuvent s'alterner les brèves et les longues dans un vers de  $n$  mātrās. Ce problème apparaît très tôt en Inde, sous le nom *maatrameru* (montagne de cadence), dans le travail du grammairien du sanskrit, Pingala, auteur du *Chhandah-shastra* (l'art de la Prosodie), vers 450 ou 200 av. J.-C. Le mathématicien indien Virahanka (en) en a donné des règles explicites au VIII<sup>e</sup> siècle. Le philosophe indien Acharya Hemachandra (c. 1150) ainsi que Gopala (c. 1135) ont revisité le problème de manière assez détaillée<sup>3</sup>.

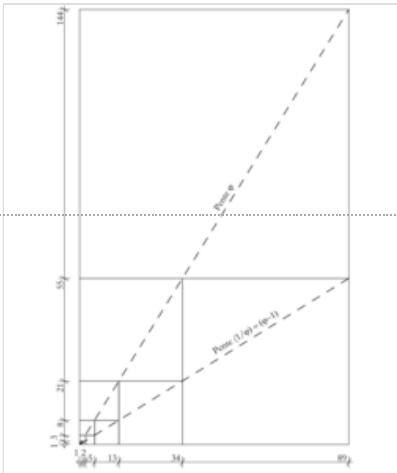
Si la syllabe longue  $L$  est deux fois plus longue que la syllabe courte  $C$ , les solutions sont, en fonction de la longueur totale de la cadence :

- 1  $C \rightarrow 1$
- 2  $CC, L \rightarrow 2$
- 3  $CCC, CL, LC \rightarrow 3$
- 4  $CCCC, CCL, CLC, LCC, LL \rightarrow 5$
- 5  $CCCCC, CCCL, CCLC, CLCC, LCCC, CLL, LCL, LLC \rightarrow 8$

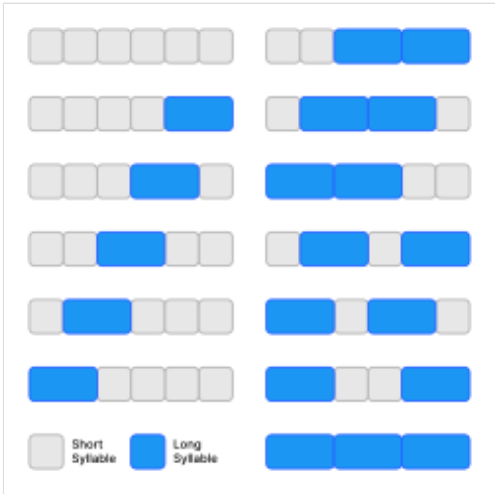
Le nombre de cadences fait apparaître les termes de la suite de Fibonacci. En effet, une cadence de longueur  $n$  peut être constituée en ajoutant  $C$  à une cadence de longueur  $n - 1$ , ou  $L$  à une cadence de longueur  $n - 2$ . Ainsi, le nombre de cadences de longueur  $n$  est la somme des deux nombres précédents de la suite.

Si on note  $S_n$ , le nombre de manière d'alterner les brèves et les longues dans un vers de  $n$  mātrās, cette remarque conduit naturellement à la relation de récurrence suivante :

$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ ,



Représentation géométrique de la fraction continue de  $\phi$  faisant apparaître les nombres de la suite de Fibonacci.



Treize ( $F_7$ ) façons d'alterner courtes et longues syllabes dans un vers de six mātrās. Huit ( $F_6$ ) finissent par une courte syllabe et cinq ( $F_5$ ) par une longue syllabe.

formule explicitement donnée dans l'œuvre de Virahanka<sup>4</sup>.

## Population de lapins

La suite doit son nom à Leonardo Fibonacci qui, dans un problème récréatif posé dans l'ouvrage Liber abaci publié en 1202, décrit la croissance d'une population de lapins : « Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance. »<sup>5</sup>

Le problème de Fibonacci est à l'origine de la suite dont le  $n$ -ième terme correspond au nombre de paires de lapins au  $n$ -ième mois. Dans cette population idéale, on suppose que :

- au début du premier mois, il n'y a qu'une paire de lapereaux ;
- les lapins ne peuvent procréer qu'à partir de l'âge de deux mois ;
- chaque début de mois, toute paire susceptible de procréer engendre exactement une nouvelle paire de lapereaux ;
- les lapins ne meurent jamais (la suite de Fibonacci est donc croissante).

Notons  $F_n$  le nombre de couples de lapins au début du mois  $n$ . Jusqu'à la fin du deuxième mois, la population se limite à un couple ; on note  $F_1 = F_2 = 1$ .

Dès le début du troisième mois, le premier couple de lapins atteint l'âge de deux mois et engendre un second couple de lapins ; on note alors  $F_3 = 2$ .

Plaçons-nous maintenant au mois  $n$  et cherchons à exprimer ce qu'il en sera deux mois plus tard, soit au mois  $n + 2$  : les  $F_{n+2}$  couples de lapins sont formés des  $F_{n+1}$  couples du mois précédent et des couples nouvellement engendrés.

Or, n'engendrent au mois  $n + 2$  que les couples pubères, c'est-à-dire ceux qui existaient déjà deux mois auparavant, qui sont en nombre  $F_n$ . On a donc, pour tout entier  $n$  strictement positif :

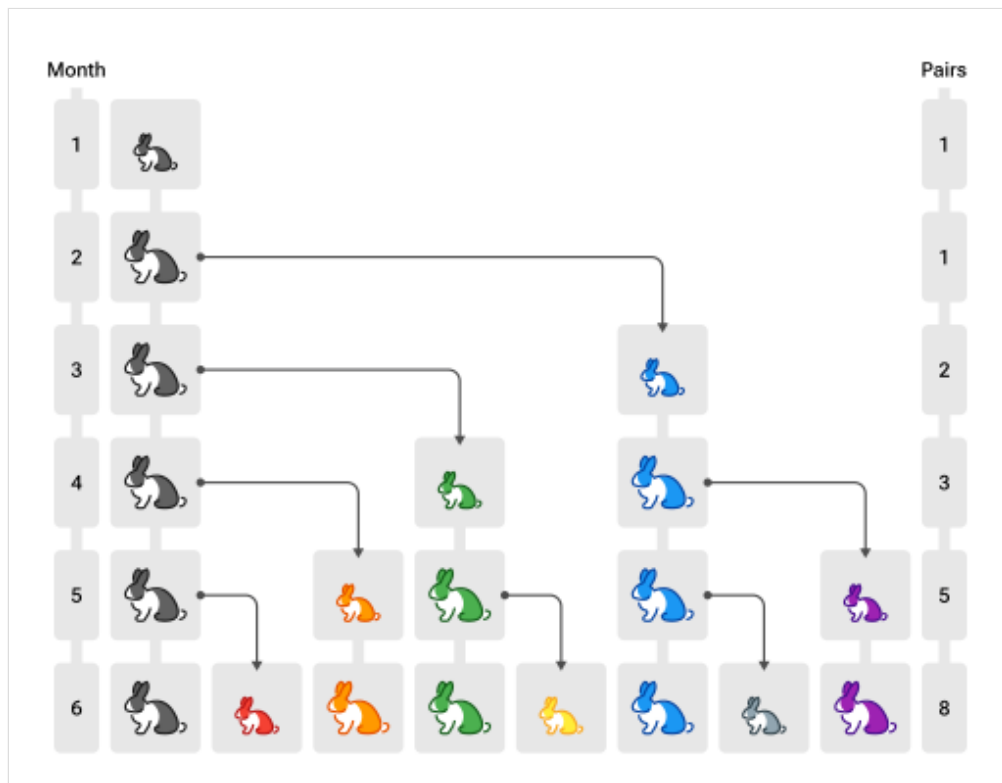
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

On choisit alors de poser  $F_0 = 0$ , de manière que cette relation soit encore vérifiée pour  $n = 0$ .

On obtient ainsi la forme récurrente de la suite de Fibonacci : chaque terme de cette suite est la somme des deux termes précédents ; pour obtenir chacun de ces deux termes, il faut faire la somme de leurs termes précédents... et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces deux termes soient les deux termes initiaux,  $F_1$  et  $F_0$ , qui sont connus.



Une page du Liber abaci de Fibonacci à la bibliothèque nationale de Florence. Sur la droite se trouve la suite de Fibonacci, chaque terme ayant sa position en latin et chiffres romains suivi de sa valeur en chiffres arabes.



Chez une population à la croissance idéale, les nombres de couples de lapins forment la suite de Fibonacci. À la fin du  $n$ -ième mois, le nombre de couples est égal à  $F_n$ .

## Expressions

Il existe plusieurs façons d'obtenir une expression mathématique du  $n$ -ième terme de la suite de Fibonacci.

### Expression fonctionnelle

Le calcul du  $n$ -ième terme de la suite de Fibonacci via la formule de récurrence requiert le calcul des termes précédents. Au contraire, une expression *fonctionnelle* de la suite de Fibonacci est une expression où le calcul du  $n$ -ième terme ne présuppose pas la connaissance des termes précédents. Binet a redécouvert une formule en 1843<sup>6</sup>, qui avait déjà été obtenue par de Moivre<sup>[réf. nécessaire]</sup> en 1718 et par Euler en 1765<sup>7</sup>. Cette expression fonctionnelle s'appelle la *formule de Binet* :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n), \quad \text{avec} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$$

#### Démonstration

Comme la suite de Fibonacci est linéairement récurrente d'ordre 2, son équation caractéristique est une équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

dont les deux solutions sont :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \varphi' = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

où  $\varphi$  est le nombre d'or. Les suites  $(\varphi^n)$  et  $(\varphi'^n)$  engendrent alors l'espace vectoriel des suites vérifiant  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ . Il en résulte que :

$$F_n = \alpha\varphi^n + \beta\varphi'^n \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes à déterminer à partir de } F_0 \text{ et } F_1.$$

Les conditions initiales  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$  conduisent au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Nous obtenons finalement l'expression fonctionnelle recherchée.

(Ces calculs restent valables pour  $n$  entier négatif quand la suite est prolongée comme ci-dessous.)

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $F_n$  est équivalent à  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ . Plus précisément,  $\varphi^n$  tend vers l'infini et  $\varphi'^n$  tend vers zéro car  $|\varphi'| < 1 < \varphi$ .

En fait, dès le rang  $n = 1$ ,  $\frac{\varphi'^n}{\sqrt{5}}$  est assez petit pour que les nombres de Fibonacci puissent être obtenus uniquement à partir de  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$  :

$F_n$  est l'entier le plus proche de  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$  (et il lui est supérieur ou inférieur, selon la parité de  $n$ ).

Il existe d'autres démonstrations de la formule de Binet, telles que la transformation en  $\mathbb{Z}$  et la technique des fonctions génératrices<sup>8</sup>. Remarquons qu'une fois découverte, cette formule se démontre aussi par récurrence (y compris pour  $n$  entier négatif).

## Expression matricielle

De la relation  $\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{bmatrix}$ , on déduit  $\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ; ceci permet d'écrire la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

En appliquant le déterminant, on obtient simplement l'identité de Cassini (propriété 5 ci-dessous) :  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .

Et en calculant de deux façons  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+m}$ , on obtient (propriété 2 ci-dessous) :  $F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m = F_{n+m}$ .

## Expression par déterminant d'ordre $n - 1$

En développant par rapport à la première colonne le déterminant d'ordre  $n$  :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix},$$

on obtient  $D_n = D_{n-1} - abD_{n-2}$ .

Comme  $D_1 = 1, D_2 = 1 - ab$ , si  $ab = -1$ , on obtient :  $D_n = F_{n+1}$  d'où, pour  $n \geq 2$ :

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & i & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

## Limite des quotients

Comme l'avait déjà remarqué Johannes Kepler<sup>9</sup>, le taux de croissance des nombres de Fibonacci, c'est-à-dire  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ , converge vers le nombre d'or  $\varphi$ .

En effet, puisque la suite  $F_n$  est équivalente à  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$  (cf. supra, section Expression fonctionnelle), la suite

$\frac{F_{n+1}}{F_n}$  est équivalente à  $\frac{\frac{\varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}} = \varphi$ , qui est donc sa limite.

En fait plus généralement, toutes les suites vérifiant la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci (cf. infra, section [Suites de Fibonacci généralisées](#)) satisfont cette propriété, sauf celles commençant par  $a$  et  $a\varphi'$ .

## Séries associées aux nombres de Fibonacci

---

### Série des inverses

---

- La série des inverses des nombres de Fibonacci non nuls est convergente, et sa somme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} = 3,35988566\dots$  est parfois appelée *constante de Fibonacci inverse* ; Richard André-Jeannin en a démontré l'irrationalité<sup>10</sup> en 1989<sup>11</sup>.
- La somme d'une de ses sous-séries  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$ <sup>12, 13</sup> est, elle, un nombre algébrique, voir la suite [A079585](#) de l'[OEIS](#).
- Le nombre  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k+1}}$  est lui aussi irrationnel<sup>13</sup>, voir la suite [A338305](#).

### Série des carrés des inverses

---

Il a été démontré que la somme  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(F_n)^2} = 2,426323\dots$  est un nombre transcendant, voir la suite [A105393](#) de l'[OEIS](#).

## Bases et espaces vectoriels

---

- La dénomination de « suite de Fibonacci généralisée » est attribuée plus généralement à toute suite  $(G_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  vérifiant pour tout entier naturel  $n$ ,  $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$ . Ces suites sont précisément celles pour lesquelles il existe des nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout entier naturel  $n$ ,  $G_n = aF_n + bF_{n+1}$ . Ainsi, l'ensemble des suites de Fibonacci est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et les suites  $(F_n)$  et  $(F_{n+1})$  en forment une base.
- Le nombre d'or est la racine positive du polynôme  $X^2 - X - 1$ , ainsi  $\varphi^2 = \varphi + 1$ . Si l'on multiplie les deux côtés par  $\varphi^n$ , on obtient  $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ , donc la suite  $(\varphi^n)$  est une suite de Fibonacci. La racine négative du polynôme,  $\varphi' = 1 - \varphi$ , possède les mêmes

propriétés, et les deux suites linéairement indépendantes  $(\varphi^n)$  et  $(\varphi'^n)$ , forment une autre base de l'espace vectoriel.

## Interprétations combinatoires

---

### Dénombrements de compositions

---

$F_{n+1}$  est égal au nombre de suites finies d'entiers égaux à 1 ou 2 dont la somme est égale à  $n$  (ou compositions de  $n$  formées des entiers 1 ou 2) <sup>14</sup>. Par exemple  $F_4 = 3$  car  $3 = 1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1$ . On peut donc interpréter  $F_{n+1}$  comme :

- le nombre de façons différentes de paver un rectangle  $2 \times n$  au moyen de dominos  $2 \times 1$ ,
- le nombre de façons de vider un tonneau de  $n$  litres à l'aide de bouteilles de un ou deux litres.

**Démonstration** : les compositions de  $n$  se terminant par 1 sont obtenues en ajoutant 1 à la fin d'une composition de  $n - 1$ , celles se terminant par 2 sont obtenues en ajoutant 2 à la fin d'une composition de  $n - 2$ , donc le nombre  $C_n$  de compositions de  $n$  vérifie  $C_n = C_{n-1} + C_{n-2}$ . De plus,  $C_0 = F_1 = 1$  (la composition vide),  $C_1 = F_2 = 1$  (la composition (1)), ce qui montre la relation.

### Dénombrements de suites de pile ou face

---

$F_{n+2}$  est égal au nombre de jeux de pile ou face de longueur  $n$  qui ne contiennent pas 2 "pile" consécutifs.

**Démonstration** : pour former un jeu de longueur  $n$  qui ne contient pas 2 "pile" consécutifs on peut commencer par 0, et continuer avec un jeu de longueur  $n - 1$  du même type, soit commencer par 1, 0 et continuer avec un jeu de longueur  $n - 2$  du même type, donc le nombre  $P_n$  de tels jeux vérifie  $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$  ; De plus,  $P_0 = F_2 = 1$  ( jeu de longueur nulle),  $P_1 = F_3 = 2$  ((1) et (0)), ce qui montre la relation.

On en déduit que  $F_{n+2}$  est aussi le nombre de parties de  $[[1, n]]$  ne contenant pas 2 entiers consécutifs.

## Algorithmes de calcul des nombres de Fibonacci

---

Le calcul des nombres de Fibonacci est souvent donné en exemple pour introduire des notions d'algorithmique, comme dans le chapitre 0 du livre *Algorithms* de Dasgupta *et al.*<sup>15</sup> ou alors dans le problème 31.3 laissé en exercice dans *Introduction à l'algorithmique* de Cormen *et al.*<sup>16</sup> ou l'exercice 2 de la section 1.2.8 de *TAOCP*, qui est précisément consacrée aux nombres de Fibonacci.

### Avec la formule de Binet

---

Calculer les nombres de Fibonacci à partir du nombre d'or est une possibilité très pratique. Néanmoins, la précision de calcul de la racine carrée génère des erreurs d'arrondis pour des valeurs assez grandes dépendant du système utilisé<sup>17</sup>. En général, on obtient les bonnes valeurs jusqu'à  $F_{71} = 308\,061\,521\,170\,129$ , sur ordinateur ou sur calculatrice.



Notons <sup>[réf. nécessaire]</sup> qu'au-delà de  $F_{79}$ , les calculs dépassent les possibilités de calcul en notation entière, et sont alors représentés en notation scientifique. Les premiers chiffres significatifs sont alors de nouveau bien représentés par cette formule.

Voici le détail d'un exemple d'application faisable à partir d'une calculatrice : le calcul de  $F_{50}$ .

Le nombre d'or vaut  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$  et d'après la formule de Binet,  $F_{50}$  est l'entier le plus proche du réel  $\frac{\varphi^{50}}{\sqrt{5}}$ , qui le dépasse à peine. Compte tenu de l'ordre de grandeur de ce réel, le théorème des accroissements finis permet de s'assurer que pour le calculer à 0,5 près par défaut, 1,618 033 988 749 89 est une approximation suffisante de  $\varphi$ .

On trouve que le réel  $(1,618\ 033\ 988\ 749\ 89)^{50}/\sqrt{5}$  est à peine inférieur à l'entier 12 586 269 025, d'où

$$F_{50} \approx \frac{\varphi^{50}}{\sqrt{5}} \approx 12\ 586\ 269\ 025,$$

si bien que

$$F_{50} = 12\ 586\ 269\ 025.$$

## Algorithme récursif naïf

Voici la mise en œuvre récursive naïve qui suit la définition de la suite de Fibonacci.

```
// entrée : un nombre entier n
// sortie : le terme de rang n de la suite de Fibonacci
fonction fib(n)
  si n = 0
    renvoyer 0
  sinon si n = 1
    renvoyer 1
  sinon
    renvoyer fib(n - 1) + fib(n - 2)
```

Ce n'est cependant pas une façon judicieuse de calculer la suite de Fibonacci, car on calcule de nombreuses fois les mêmes valeurs. Le temps de calcul est exponentiel en  $n$ , à moins d'employer une technique de mémoïsation.

## Algorithme polynomial

On calcule le  $n$ -ième terme de la suite de Fibonacci en mémorisant deux termes consécutifs de la suite. On commence avec les deux premières valeurs  $a = 0$  et  $b = 1$ , puis on remplace répétitivement le premier nombre par le second, et le second nombre par la somme des deux.

```
fonction fib(n)
  (a, b) ← (0, 1)
  pour i de 1 à n
    (a, b) ← (b, a + b)
  renvoyer a
```

L'algorithme réalise  $n$  additions. On peut montrer que le  $n$ -ième terme de la suite de Fibonacci s'écrit avec  $O(n)$  bits. Comme l'addition de deux nombres sur  $n$  bits est linéaire en  $n$ , l'algorithme est en  $O(n^2)$ <sup>15</sup>. De manière équivalente à l'algorithme ci-dessus, on peut écrire une fonction réursive terminale, c'est-à-dire où la dernière opération effectuée par la fonction est un appel récursif. Voici un algorithme récursif terminal<sup>18</sup> pour calculer la suite de Fibonacci.

```

fonction fib(n, a, b)
  si n = 0
    renvoyer a
  sinon si n = 1
    renvoyer b
  sinon
    renvoyer fib(n - 1, b, a + b)

```

L'appel à `fib(n, 0, 1)` lance le calcul pour la valeur de  $n$  donnée. Les paramètres  $a$  et  $b$  sont des accumulateurs : la valeur de  $a$  est  $F_n$  et celle de  $b$  est  $F_{n+1}$ . Le temps de calcul est à chaque fois proportionnel à  $n$ . Par contre, l'espace mémoire occupé n'est *a priori* plus constant. Pour les langages qui réalisent l'optimisation d'élimination de la récursivité terminale, la mémoire occupée est constante.

## Algorithme corécursif

En Haskell, on peut définir la suite de Fibonacci comme un stream (une liste infinie qui est évaluée de façon paresseuse<sup>19, 20</sup>).

```

fibs = 0:1:zipWith (+) fibs (tail fibs)

```

Le calcul du  $n$ -ième terme s'effectue avec :

```

fibs !! n

```

## Algorithme avec expression matricielle

Comme vu ci-dessus,  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ , on écrit un algorithme qui utilise l'exponentiation rapide pour calculer  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ , afin d'en déduire le  $n$ -ième terme. Si on considère les additions et multiplications de nombres comme des opérations élémentaires, en coût constant, l'algorithme est logarithmique en  $n$ . En comptabilisant la complexité des additions et multiplications, on peut montrer que la complexité de cet algorithme est en  $O(M(n) \log n)$ , et même  $O(M(n))$ , où  $M(n)$  est la complexité de l'algorithme utilisée pour réaliser une multiplication de deux nombres sur  $n$  bits (voir exercice 0.4 dans <sup>15</sup>).

## Série génératrice

La série génératrice de la suite de Fibonacci<sup>8</sup> donne une série entière dont le rayon de convergence vaut  $1/\varphi$  (d'après le théorème de Cauchy-Hadamard ou plus simplement, la règle de d'Alembert). Pour tout complexe  $z$  de module strictement inférieur à  $1/\varphi$ , la série correspondante (absolument convergente) est égale à

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} F_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

(donc à  $z \sum_{m \in \mathbb{N}} (z + z^2)^m = \sum_{m, k \in \mathbb{N}} \binom{m}{k} z^{1+m+k}$ , où les coefficients binomiaux  $\binom{m}{k}$  sont nuls pour  $k > m$ ).

### Démonstration

Notons

$$s(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} F_n z^n.$$

En multipliant les deux membres de la relation de récurrence par  $z^{n+2}$  puis en sommant sur tous les entiers naturels  $n$ , on obtient :

$$s(z) - F_0 - F_1 z = z(s(z) - F_0) + z^2 s(z),$$

c'est-à-dire, compte tenu de  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$  :

$$s(z) - z = z s(z) + z^2 s(z),$$

ou encore

$$(1 - z - z^2)s(z) = z.$$

On peut diviser les deux membres par  $1 - z - z^2$  puisque  $z$  est différent des deux racines  $-\varphi$  et  $1/\varphi$ .

En particulier, pour tout réel  $k > \varphi$ ,

$$\frac{1}{k^2 - k - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \times k^{-(n+1)}.$$

## Propriétés de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci présente de remarquables propriétés. Leur recherche et leur étude font l'objet de publications régulières, notamment par l'association d'universitaires « The Fibonacci Association » dans sa revue « The Fibonacci Quarterly », consultable en ligne<sup>21</sup>. Certaines de ces propriétés, que l'on peut démontrer à partir de la formule de Binet, ou par récurrence ou encore à l'aide de l'expression matricielle de la suite, sont indiquées dans cette section. Nous donnons également quelques propriétés liant la suite de Fibonacci et la suite de Lucas ( $L_n$ ) définie par la même relation de récurrence mais avec pour initialisation  $L_0 = 2$  et  $L_1 = 1$ , et pour laquelle l'analogue de la formule de Binet est :  $L_n = \varphi^n + \varphi'^n$ .

**Propriété 1** :  $\forall (p, q, r) \in \mathbb{Z}^3, F_p F_{q+r} - (-1)^r F_{p-r} F_q = F_{p+q} F_r$ , ou encore :  $F_p F_{q+r} - F_r F_{p+q} = (-1)^r F_{p-r} F_q$ .

C'est un cas particulier des identités remarquables vérifiées par les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

**Propriété 2** :  $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, F_p F_{q+1} + F_{p-1} F_q = F_{p+q}$ .

C'est le cas  $r = 1$  de la propriété 1<sup>22</sup>. On peut aussi la démontrer à l'aide de l'expression matricielle :

### Démonstration

On pose  $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et on a donc :  $\mathcal{M}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$

On a également :  $\mathcal{M}^{p+q} = \mathcal{M}^p \times \mathcal{M}^q$

$$\text{Donc : } \begin{bmatrix} F_{p+q+1} & F_{p+q} \\ F_{p+q} & F_{p+q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{p+1} & F_p \\ F_p & F_{p-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{q+1} & F_q \\ F_q & F_{q-1} \end{bmatrix}$$

En calculant explicitement la valeur de  $F_{p+q}$  dans la ligne du bas et colonne de gauche de la première matrice, on trouve la formule recherchée :  $F_{p+q} = F_p \times F_{q+1} + F_{p-1} \times F_q$

**Propriété 3 :**  $\forall p \in \mathbb{Z}, F_{2p-1} = F_{p-1}^2 + F_p^2$ .

C'est le cas  $q = p - 1$  de la propriété 2.

**Propriété 4 :** (identité d'Ocagne)  $\forall (p, r) \in \mathbb{Z}^2, F_p F_{r+1} - F_r F_{p+1} = (-1)^r F_{p-r}$ .

C'est le cas  $q = 1$  de la propriété 1.

**Propriété 5 :**  $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, F_p^2 - F_{p-q} F_{p+q} = (-1)^{p-q} F_q^2$  (identité de Catalan) et  $F_{p+1} F_{p-1} - F_p^2 = (-1)^p$  (identité de Cassini<sup>14,23</sup>).

L'identité de Catalan est le cas  $r = p - q$  de la propriété 1. L'identité de Cassini est le cas  $q = 1$  de celle de Catalan (c'est donc aussi le cas  $r = p - 1$  de la propriété 4). L'identité de Cassini peut aussi se démontrer à l'aide de l'expression matricielle :

#### Démonstration

On pose  $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  et on a donc :  $\mathcal{M}^p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} F_{p+1} & F_p \\ F_p & F_{p-1} \end{bmatrix}$ . Les déterminants de ces deux dernières matrices sont donc égaux, ce qui donne :  $F_{p+1} \times F_{p-1} - F_p^2 = (-1)^p$ , qui est la formule recherchée.

$$\text{Corollaire 1 : } \forall p \in \mathbb{Z}, F_p = \frac{F_{p-1} + \sqrt{5F_{p-1}^2 - 4(-1)^p}}{2} \text{ et } \sqrt{5F_p^2 + 4(-1)^p} \in \mathbb{N}.$$

#### Démonstration

Pour prouver la première propriété, il suffit de considérer l'identité de Cassini  $(F_p + F_{p-1})F_{p-1} - F_p^2 = (-1)^p$  et de résoudre l'équation du second degré obtenue d'inconnue  $F_p$ , à savoir  $F_p^2 - F_{p-1}F_p - F_{p-1}^2 + (-1)^p = 0$ .

La suite de Fibonacci apparaît également comme une suite récurrente du premier ordre, mais non linéaire.

Pour en déduire la fin du corollaire, on fait un petit décalage d'indice dans la formule précédente, en remarquant que les termes de la suite de Fibonacci sont entiers.

Corollaire 2 :  $\forall p \in \mathbb{Z}, F_{p+2}F_{p+1}F_{p-1}F_{p-2} - F_p^4 + 1 = 0$ .

#### Démonstration

$$\begin{aligned} F_{p+1}F_{p-1}F_{p+2}F_{p-2} &= (F_p^2 - (-1)^{p-1}F_1^2)(F_p^2 - (-1)^{p-2}F_2^2) \\ &= (F_p^2 \pm 1)(F_p^2 \mp 1) \\ &= F_p^4 - 1. \end{aligned}$$

**Propriété 6 :** La suite de Fibonacci est à divisibilité faible<sup>24</sup> :  $\forall (k, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad F_n \mid F_{nk}$ <sup>25</sup>.

Cela résulte de la propriété 2.

#### Démonstration

Appliquons la propriété 2 à  $q = p$ . Nous obtenons :  $F_p F_{p+1} + F_{p-1} F_p = F_{2p}$ . Donc  $F_p$  divise  $F_{2p}$ .

Appliquons maintenant la propriété 2 à  $q = kp$ . Nous avons :  $F_p F_{kp+1} + F_{p-1} F_{kp} = F_{(k+1)p}$ . Donc si  $F_p$  divise  $F_{kp}$ , il divise aussi  $F_{(k+1)p}$ . En raisonnant par récurrence depuis  $k = 1$ , on démontre donc bien que  $\forall (k, p) \in \mathbb{Z}^2 \quad F_p \mid F_{kp}$ .

On peut aussi démontrer cette propriété par la proposition 4 (par récurrence sur  $|k|$ ), ou par un calcul explicite du quotient (en particulier,  $F_{2n} = F_n L_n$ ).

**Propriété 7 :** Pour tout entier naturel  $n$  différent de 4, si  $F_n$  est premier, alors  $n$  est premier.

#### Démonstration

Il est plus facile de démontrer la contraposée de cette proposition : si  $n$  est composé alors  $F_n$  aussi. En effet, supposons  $n = mk$  avec  $m$  et  $k$  entiers strictement supérieurs à 1. Comme  $n$  est supposé différent de 4, l'un au moins des deux facteurs est strictement supérieur à 2 : par exemple  $m > 2$ . D'après la propriété 6,  $F_m$  est alors un diviseur propre de  $F_n$ , qui n'est donc pas premier.

La réciproque est fautive, car 2 est premier alors que  $F_2$  ne l'est pas ; de façon moins triviale,  $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$ .

**Propriété 8 :** La suite de Fibonacci est même à divisibilité forte<sup>26</sup> :  $\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, F_a \wedge F_b = F_{a \wedge b}$ , où  $\wedge$  désigne le PGCD de nombres entiers.

En particulier pour tout entier  $n$ ,  $F_n$  et  $F_{n+1}$  sont premiers entre eux<sup>27</sup>.

#### Démonstration

Soient  $d = a \wedge b$  et  $D = F_a \wedge F_b$  (qui sont tous deux positifs, de même que  $F_d = |F_{-d}|$ ).

- D'après la propriété 6,  $F_d \mid F_a$  et  $F_d \mid F_b$  donc  $F_d \mid D$ .
- D'après les propriétés 2 et 4,  $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad F_p \wedge F_q \mid F_{p \pm q} \wedge F_q$  donc par anthypthérèse,  $D \mid F_d$ .

- Nous en concluons que  $F_d = D$ .

**Propriété 9 :**  $\forall (p, r) \in \mathbb{Z}^2, F_{p+r} - (-1)^r F_{p-r} = F_r L_p$ . En particulier :

$$F_{p+1} + F_{p-1} = L_p, \quad F_{p+2} - F_{p-2} = L_p, \quad F_{p+3} + F_{p-3} = 2L_p.$$

L'égalité est immédiate si  $p = 0$ . Pour  $p \neq 0$ , c'est le cas particulier  $q = p$  de la propriété 1.

**Propriété 10 :**  $\forall n \in \mathbb{Z}, \varphi^n = F_n \varphi + F_{n-1}$  et  $\varphi'^n = F_n \varphi' + F_{n-1}$ .

#### Démonstration

Par somme et différence, il revient au même de démontrer que

$$L_n = F_n L_1 + 2F_{n-1} \text{ et } F_n = F_n F_1.$$

La seconde égalité est immédiate et la première résulte de la propriété 9 :

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = (F_n + F_{n-1}) + F_{n-1}.$$

**Propriété 11 :** La suite de Fibonacci possède plusieurs propriétés de récurrence additive forte, notamment :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^n F_{2i-1} = F_{2n}, \quad 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_{2i} = F_{2n-1} \quad \text{et} \quad 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n+1}^{28}.$$

La suite  $(F_{2n})$  vérifie en outre :  $F_{2n} = n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) F_{2k}$  pour  $n \geq 2$  ; voir la suite [A088305](#) de l'[OEIS](#).

#### Démonstration

Les trois premières formules peuvent se démontrer par la même méthode, dite de somme télescopique :

a) pour la première, on remplace dans la somme chaque  $F_{2i-1}$  par son égal :  $(F_{2i} - F_{2i-2})$ , et, comme  $F_0 = 0$ , on trouve l'égalité recherchée.

b) pour la deuxième, on remplace dans la somme chaque  $F_{2i}$  par son égal :  $(F_{2i+1} - F_{2i-1})$ , et, comme  $F_{-1} = 1$ , on trouve l'égalité recherchée.

c) pour la troisième on remplace dans la somme chaque  $F_i$  par son égal :  $(F_{i+1} - F_{i-1})$ , et, comme  $F_{-1} = 1$ , on trouve l'égalité recherchée. Cette troisième formule peut aussi se démontrer par récurrence directe à partir de  $n = 1$ , ou, après avoir démontré les deux formules mentionnées en a) et b), en remarquant qu'elle en découle par addition.

La quatrième formule se démontre par récurrence et en utilisant les deux premières formules.

**Propriété 12 :**  $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n-1-k}{k}$  (somme finie car les coefficients binomiaux  $\binom{n-1-k}{k}$  sont nuls si  $k < 0$  ou si  $k > n-1-k$ ).

Cette propriété se déduit immédiatement de l'expression de la série génératrice (voir *supra*). On peut aussi la démontrer par une récurrence d'ordre 2 sur  $n^{\frac{22}{}}$  :

## Démonstration

- Initialisation

$$(n = 0) : \sum_k \binom{-1-k}{k} = 0$$

et  $\mathcal{F}_0 = 0$

$$(n = 1) : \sum_k \binom{-k}{k} = 1 \text{ et}$$

$$\mathcal{F}_1 = 1$$

- Hypothèses de récurrence :

$$\mathcal{F}_n = \sum_k \binom{\text{rang} - 1 - k}{k}$$

au rang  $n + 1$ ,

$$\mathcal{F}_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$$

- Hérité (rang  $n + 2$ ) :

$$\sum_k \binom{n+1-k}{k} = \sum_k \left( \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} \right)$$

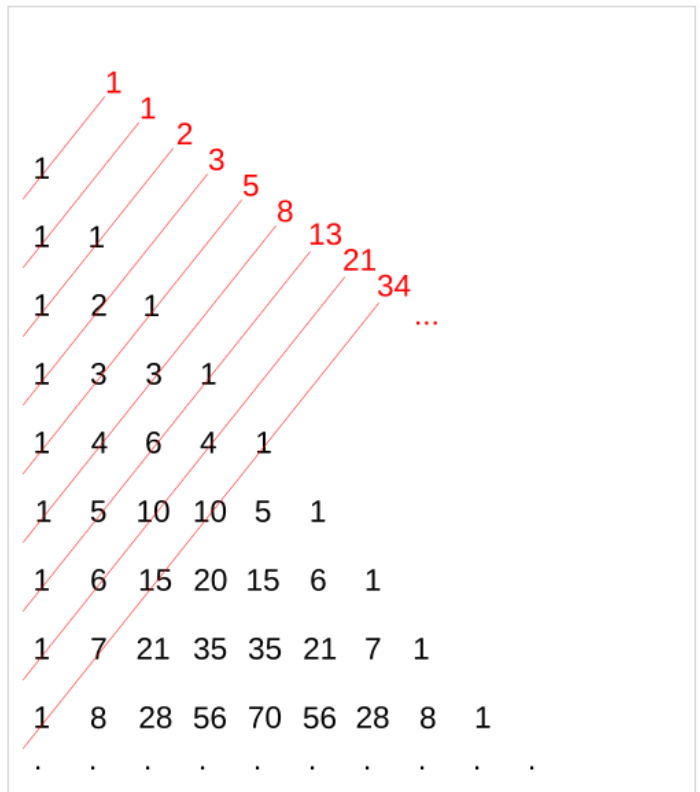
(formule du triangle de Pascal)

$$= \mathcal{F}_{n+1} + \sum_m \binom{n-1-m}{m}$$

(hypothèse de récurrence,  
changement de variable  
 $m = k - 1$ )

$$= \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \text{ (hypothèse de récurrence)}$$

$= \mathcal{F}_{n+2}$  (définition de la suite de Fibonacci).



La somme des diagonales ascendantes du triangle de Pascal forme la suite de Fibonacci.

Cela signifie que, dans un triangle de Pascal, les nombres de Fibonacci s'obtiennent en sommant les termes situés sur une diagonale (du bas vers la droite). Les termes de ces diagonales sont d'ailleurs les coefficients des polynômes de Fibonacci ; ainsi,  $F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$  et  $F_9(x) = x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$ .

**Propriété 13 :**  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{n-1}F_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k+1} 5^k$ .

Cette propriété découle du développement binomial de la formule de Binet<sup>29</sup> ; on a d'ailleurs une formule analogue pour les nombre de Lucas :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{n-1} L_n = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \binom{n}{2k} 5^k$ .

**Propriété 14 :** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $u_n = F_{n+1}/F_n$  vérifie  $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$  et  $u_n^2 - u_n - 1 = (-1)^n / F_n^2$ .

#### Démonstration

On a  $u_n = F_{n+1}/F_n$ , donc :  $u_{n+1} = F_{n+2}/F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n)/F_{n+1} = 1 + 1/u_n$ , ce qui est la première formule recherchée.

Pour démontrer la deuxième égalité, on part de :  $F_n^2 \times (u_n^2 - u_n) = F_{n+1}^2 - F_{n+1} \times F_n$ .

Donc, par l'identité de Cassini :

$F_n^2 \times (u_n^2 - u_n) = F_{n+2} \times F_n - (-1)^{n+1} - F_{n+1} \times F_n = (F_{n+2} - F_{n+1}) \times F_n + (-1)^n$ , soit :  $u_n^2 - u_n = 1 + (-1)^n / F_n^2$ , qui est la formule recherchée.

**Propriété 15 :** La factorisation des polynômes de Fibonacci permet d'exprimer les  $F_n$  (pour  $n \geq 1$ ) sous forme de produits trigonométriques<sup>30</sup> :

$$F_n = \prod_{1 \leq k \leq (n-1)/2} 3 + 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

## Arithmétique

### Divisibilité des nombres de Fibonacci

Une première approche de la question de la divisibilité de  $F_n$  par un entier  $a$  consiste à étudier la suite des restes de  $F_n$  modulo  $a$  : cette suite  $(r_n)$  vérifie (dans  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ ) la même récurrence ( $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$ ) et est donc périodique de période au plus  $a^2$  (les longueurs des périodes en fonction de  $a$  forment la suite des périodes de Pisano, suite A001175 de l'OEIS) ; on en déduit que pour tout  $a$ , il existe  $n$  inférieur ou égal à  $a^2$  tel que  $F_n$  (et donc  $F_{kn}$ ) soit divisible par  $a$ . Plus précisément, l'étude de cette récurrence dans le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (où  $p$  est un nombre premier) amène à des formules analogues à la formule de Binet, d'où l'on déduit finalement (selon que 5 est ou n'est pas un carré modulo  $p$  ; voir la loi de réciprocité quadratique) que  $F_{5n}$  est divisible par 5, et que si  $p$  est premier autre que 5,  $F_{(p-1)n}$  est divisible par  $p$  si  $p$  est de la forme  $5m + 1$  ou  $5m + 4$ , et  $F_{(p+1)n}$  est divisible par  $p$  sinon. Des résultats plus précis peuvent d'ailleurs être obtenus ; ainsi, dans le premier cas,  $F_{(p-1)/2}$  est divisible par  $p$  si  $(p-1)/2$  est pair<sup>31</sup>. Enfin, si  $p > 2$  est premier et divise  $F_n$ ,  $p^k$  divise  $F_{p^{k-1}n}$ , et  $2^{k+1}$  divise  $F_{3 \times 2^{k-1}}$  (si  $k > 1$ ) ; ces derniers résultats sont des conséquences du lemme de Hensel<sup>32, 33</sup> ; les mêmes méthodes permettent d'obtenir des résultats analogues pour les nombre de Lucas<sup>31, 34</sup>.

### Primalité des nombres de Fibonacci

Un nombre premier de Fibonacci est un nombre de Fibonacci qui est également premier.



Les sept plus petits nombres premiers de Fibonacci  $F_n$  sont<sup>35</sup> 2, 3, 5, 13, 89, 233 et 1 597, et les indices  $n$  correspondants sont 3, 4, 5, 7, 11, 13 et 17 (sauf pour  $F_4$ , ces indices sont nécessairement premiers<sup>36</sup>).

On découvre au fil des ans des nombres de Fibonacci premiers de plus en plus grands, mais on ignore toujours s'il en existe une infinité.

## Décomposition d'un entier en somme de nombres de Fibonacci

Tout entier positif se décompose de manière unique comme somme de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs.

### Exemple

$$25 = 21 + 3 + 1 = F_8 + F_4 + F_2.$$

## Applications

---

### En mathématiques

---

- La suite de Fibonacci apparaît dans de nombreux problèmes de dénombrement. Par exemple, le terme d'indice  $n$  (pour  $n$  supérieur ou égal à 2) de la suite de Fibonacci permet de dénombrer le nombre de façons de parcourir un chemin de longueur  $n-1$  en faisant des pas de 1 ou 2. Ce problème est également équivalent au problème de bin packing pour  $n$  articles de longueur 1 ou 2, tel qu'on le trouve par exemple dans *The Art of Computer Programming* de Donald Knuth. [réf. nécessaire]
- Les nombres de Fibonacci interviennent dans l'étude de l'exécution de l'algorithme d'Euclide qui détermine le plus grand commun diviseur de deux entiers<sup>16</sup>.
- Ils sont l'outil (grâce à la propriété 8 et la factorisation de  $F_{19}$ ) d'une démonstration originale du théorème d'Euclide sur les nombres premiers<sup>37</sup>.
- Youri Matiiassevitch a montré que les nombres de Fibonacci pouvaient être définis par une équation diophantienne [réf. nécessaire], ce qui a conduit à la résolution du dixième problème de Hilbert. En 1975, Jones en a déduit que, pour des valeurs de  $x$  et  $y$  entières positives ou nulles, les valeurs positives du polynôme  $2xy^4 + x^2y^3 - 2x^3y^2 - y^5 - x^4y + 2y$  étaient exactement les nombres de Fibonacci [réf. nécessaire]. Ces valeurs positives s'obtiennent d'ailleurs en attribuant pour valeurs à  $x$  et  $y$  deux nombres de Fibonacci successifs.
- Les nombres de Fibonacci apparaissent dans la formule des diagonales du triangle de Pascal (voir Propriétés, Propriété 12).
- Une bonne approximation d'un rectangle d'or peut être construite à l'aide de carrés dont les côtés sont égaux aux nombres de Fibonacci.
- Une spirale logarithmique peut être approchée de la manière suivante : on commence à l'origine d'un repère cartésien, on se déplace de  $F_1$  unités vers la droite, puis de  $F_2$  unités vers le haut, on se déplace de  $F_3$  unités vers la gauche, ensuite de  $F_4$  unités vers le bas, puis de  $F_5$  unités vers la droite, etc. Cela ressemble à la construction mentionnée dans l'article sur le nombre d'or.
- Les nombres de Fibonacci apparaissent souvent dans la nature lorsque des spirales logarithmiques sont construites à partir d'une unité discrète, telles que dans les tournesols ou dans les pommes de pin. Le nombre de pétales de la marguerite (et d'autres fleurs composées comme le tournesol) appartient à la suite de Fibonacci : souvent 34, 55 ou 89.

Cela s'explique par le mécanisme de développement de la plante (voir le paragraphe « Phyllotaxie » de l'article sur le nombre d'or).

## Informatique

- La suite de Fibonacci est utilisée comme outil mathématique dans l'analyse de la complexité pire cas de l'algorithme du simplexe<sup>38</sup>.
- La suite de Fibonacci intervient dans les tas de Fibonacci.

## Biologie

La plupart des êtres vivants sexués sont issus de deux parents, de sorte que leurs ancêtres à la  $n^e$  génération, supposés distincts, sont au nombre de  $2^n$ . Mais les hyménoptères sont tels que les femelles sont issues de deux parents, et les mâles sont issus d'une mère seulement. Il en résulte que leurs ancêtres à la  $n$ -ième génération sont constitués :

pour les femelles, de  $F_n$  mâles et  $F_{n+1}$  femelles,

pour les mâles, de  $F_{n-1}$  mâles et  $F_n$  femelles.

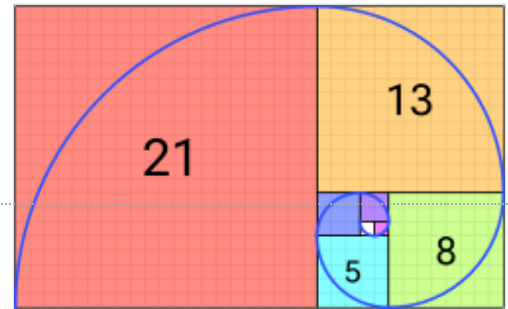
Cette forme de reproduction asexuée décrit exactement la reproduction des abeilles. Récemment, une analyse mathématique et historique du contexte de Fibonacci et sa proximité de la ville de Béjaïa, une grande source de cire à l'époque (la version française du nom de cette ville est *Bougie*), a suggéré que ce seraient en fait les apiculteurs de Béjaïa et la connaissance de la reproduction des abeilles qui, plutôt que la reproduction des lapins, auraient inspiré la découverte de Fibonacci<sup>39</sup>.

## Art

En poésie, un fib est un petit poème, sorte de haïku, dont le nombre de pieds des premiers vers correspond aux premiers nombres de la suite (1, 1, 2, 3, 5, 8).

## Généralisations

Il existe plusieurs façons de généraliser la suite de Fibonacci : étendre aux indices négatifs, modifier les valeurs initiales, modifier les coefficients de la relation de récurrence ou modifier le nombre de termes (ou ordre) de la relation de récurrence. Si on modifie tout à la fois (initialisation, récurrence, ordre) on arrive à l'ensemble général des suites à récurrence linéaire. Un bon nombre de propriétés se généralisent au cas où le polynôme minimal de la suite récurrente linéaire définit un nombre de Pisot. Ces propriétés ont été étudiées



La spirale de Fibonacci : une approximation de la spirale d'or formée en traçant des arcs de cercle reliant les sommets opposés des carrés de Fibonacci (voir image en haut de cette page).



Animation GIF représentant Fibonacci

en lien avec la théorie des automates finis (sur les mots finis et les mots infinis) dans la thèse d'État de Christiane Frougny sur la représentation des entiers et des réels en base Pisot, sur une suggestion de Marcel-Paul Schützenberger.

## Extension aux indices négatifs

La suite est étendue aux indices négatifs et Knuth parle de nombres de *negafibonacci*<sup>40</sup>. La formule de récurrence les définit aussi de proche en proche :

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Ainsi, autour de 0, la suite est :

|          |          |          |          |          |          |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $F_{-6}$ | $F_{-5}$ | $F_{-4}$ | $F_{-3}$ | $F_{-2}$ | $F_{-1}$ | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ |
| -8       | 5        | -3       | 2        | -1       | 1        | 0     | 1     | 1     | 2     | 3     | 5     | 8     |

On remarque, sur ces premières valeurs, que

- si  $n$  est pair alors  $F_{-n} = -F_n$
- si  $n$  est impair alors  $F_{-n} = F_n$

ou plus synthétiquement :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

On peut le démontrer pour tout entier  $n$ , par la formule de Binet ci-dessus, ou directement par récurrence.

## Suites de Fibonacci généralisées

On appelle suite de Fibonacci généralisée toute suite définie par la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci, mais dont les termes initiaux sont différents de 0 et 1 <sup>[réf. nécessaire]</sup>. Sur le modèle de la démonstration donnée plus haut (voir section Expression fonctionnelle), une telle suite  $u_n$  est encore de la forme  $\alpha\varphi^n + \beta\varphi'^n$  où  $\varphi$  est le nombre d'or et  $\varphi' = -1/\varphi$ . Elle est donc équivalente à  $\alpha\varphi^n$ , sauf si  $\alpha = 0$  (ce qui ne se produit que si  $u_1 = \varphi' u_0$ ), si bien que (comme la suite des quotients de la suite de Fibonacci) la suite  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  converge vers  $\varphi$ .

Parmi ces suites de nombres, il faut signaler les nombres de Lucas obtenus en choisissant comme initialisation :  $L_0 = 2$  et  $L_1 = 1$ . Cela donne la suite 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,... On trouve parfois une initialisation  $L_0 = 1$  et  $L_1 = 3$  qui ne consiste qu'à décaler la suite d'un rang. Ces nombres interviennent dans la résolution d'équations diophantiennes. Ils sont très liés à la suite de Fibonacci par la relation suivante :  $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$  pour tout entier  $n > 0$  (voir Propriétés, *Propriété 9*).

## Suites de Lucas

Ce sont les suites où la relation de récurrence a changé et est devenue <sup>[réf. nécessaire]</sup>

$$X_{n+2} = PX_n - QX_{n+1}.$$

Elles sont de deux types, notés  $X = U$  et  $X = V$ , selon que l'initialisation est  $U_0 = 0$  et  $U_1 = 1$  ou qu'elle est  $V_0 = 2$  et  $V_1 = P$ .

La suite de Fibonacci et la suite des nombres de Lucas sont les suites  $U$  et  $V$  de Lucas de paramètres  $P = 1$  et  $Q = -1$ .

## Suites de k-bonacci

Ce sont des suites dont la relation de récurrence est d'ordre  $k$ <sup>41</sup>. Un terme est la somme des  $k$  termes qui le précèdent :

$$u_{n+k} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+k-1}.$$

Parmi ces suites, on distingue la suite de Tribonacci (récurrence d'ordre 3) et la suite de Tetranacci (récurrence d'ordre 4). Selon ce nouveau classement de suites, la suite de Fibonacci est une suite de 2-bonacci.

## Dans la nature

La suite de Fibonacci apparaît sous de nombreuses formes biologiques<sup>42</sup>, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas<sup>43</sup>, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin<sup>44</sup>, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Chez les Astéracées, dans les inflorescences en capitule, la disposition des fleurons sur le réceptacle forme des spirales régulières, dextres et sénestres, qui suivent les règles de la phyllotaxie dans lesquelles on peut retrouver la suite de Fibonacci<sup>43</sup>.



Centre d'une fleur de tournesol. Le réceptacle forme des spirales régulières, dextres et sénestres, dans lesquelles on peut retrouver la suite de Fibonacci.

Les abeilles domestiques ont une reproduction haplodiploïde : un œuf non fécondé donnera un mâle et un œuf fécondé donnera une ouvrière ou une reine. Ainsi, un mâle aura une mère, quand les ouvrières et reine auront une mère et un père. Par conséquent, le pedigree d'un mâle est constitué d'un parent, de deux grands-parents, de trois arrière-grands-parents, de cinq arrière-arrière-grands-parents, etc. ; il s'agit d'une suite de Fibonacci<sup>45</sup>.

## Dans la culture

---

### Peinture

Dans son tableau *Parade de cirque*, peint en 1887-1888, Georges Seurat emploie les premiers termes de la suite : un personnage central, deux personnages à droite, trois musiciens, cinq banderoles ou cinq spectateurs en bas à gauche, huit à droite, treize en tout<sup>46</sup>.



Georges Seurat, *Parade de cirque*, 1887-1888

### Littérature

- Kurt Aust, *La confrérie des invisibles*, City Edition, 2010, 450 p. (ISBN 978-2-8246-0164-9, lire en ligne (<https://books.google.fr/books?id=kTrrNo-R6psC&pg=PT42&dq=fibonacci+confr%C3%A8rie+des+invisibles>))
- Silvia Brena et Iginio Straffi, *Maya Fox 2012 : La prédestinée*, t. 1, Pocket Jeunesse, 2011
- Dan Brown, *Da Vinci Code*, Le Livre de Poche, 2014
- William Dietrich, *Les pyramides de Napoléon*, Pocket, 2010
- Emily Gravett, *Le problème avec les lapins*, Kaléidoscope, 2009
- Jacques Lacan, *Le Séminaire, livre XVI : D'un Autre à l'autre*, Le Seuil, 2006, chap. « Du pari de Pascal »
- Éric Pessan, *L'écorce et la chair*, Éditions du chemin de fer, 2015 (résumé (<http://www.chemindefer.org/catalogue/l-e-corce-et-la-chair/presentation-du-livre.html>))
- Hiroshi Yuki, *Math Girls*, Bento Books, 2011
- Dans la nouvelle de science-fiction *Le Gardien du savoir*, le robot-garde exige comme mot de passe une "formule magique" qui n'est autre que la suite de Fibonacci, oubliée des hommes.
- *Steel Ball Run*

### Cinéma

- *Pi*
- *Crimes à Oxford*
- *Jean de Florette*
- *L: Change the World*
- *Le Nombre 23*
- *Las Vegas 21*
- *Da Vinci Code*

- Nymphomaniac<sup>47, 48</sup>
- Le Monde de Nathan<sup>49</sup>

## Télévision

- Numb3rs (épisode 6 de la saison 1 ; épisode 21 de la saison 5)
- Fringe (épisode 10 de la saison 1 ; épisode 6 de la saison 4)
- Alias
- Lost
- Esprits criminels (épisode 8 de la saison 4)
- Chuck (épisode 7 de la saison 2)
- Disparition
- Touch (série télévisée)

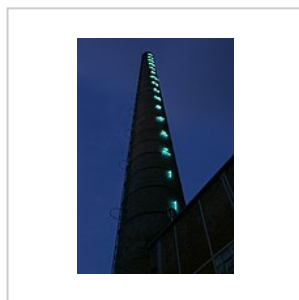
## Musique

- Le groupe de metal progressif Tool structure le rythme de certaines parties du morceau Lateralus selon une suite de Fibonacci<sup>50</sup>.
- La chanteuse suisse pour enfants Sonia Grimm a publié sur son album *Un petit lapin* une chanson intitulée *Le lapin de Fibonacci*. Cette chanson présente aux enfants le nombre d'or et la suite de Fibonacci à travers l'exemple de la croissance d'une population de lapins<sup>51</sup>.
- Selon Ernő Lendvai<sup>52</sup>, le compositeur Béla Bartók s'est régulièrement servi du nombre d'or et de la suite de Fibonacci dans ses œuvres. L'exemple le plus emblématique serait sa Musique pour cordes, percussion et célesta. Cependant, d'autres spécialistes de Bartók ont critiqué cette interprétation<sup>53</sup>.
- Le compositeur Iannis Xenakis a plusieurs fois utilisé la suite de Fibonacci : dès 1952 en tentant de créer une "image auditive" de cette série, puis dans quelques compositions : *Zygia* en 1952 et *Le Sacrifice* en 1953<sup>54</sup>.
- Sur la guitare de Robert Smith, chanteur de The Cure, pour la tournée 2016 du groupe, figure le début de la suite de Fibonacci<sup>55</sup>.
- Le rappeur Damso fait référence à la suite de Fibonacci dans sa chanson *Fibonacci*<sup>56</sup>.

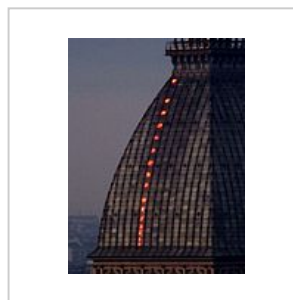
## Architecture

Le Corbusier et son Modulor, une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique.

### Illustrations architecturales



Cheminée d'usine à Unna.



Mole Antonelliana à Turin.

Mario Merz, *Suite de Fibonacci*, commande publique artistique, 1994, Strasbourg.

## Jeux et jeux vidéo

---

Dans le jeu *Metal Gear Solid 4: Guns of the Patriots*, la suite de Fibonacci apparaît en tant que petite comptine chantée par la petite Sunny.

Dans le jeu *Watch Dogs*, la suite de Fibonacci est introduite dans l'algorithme de Bellwether, capable de transmettre un message subliminal à travers le système ctOS.

Dans le jeu *Elite* sur BBC Micro, les développeurs ont utilisé la suite de Fibonacci pour permettre au jeu de tenir dans 22 ko. Le jeu génère donc aléatoirement la galaxie, mais il peut ensuite la générer exactement de la même façon lorsqu'une partie est sauvegardée puis rechargée.

Le jeu de société « 4.6.Suite » (jeu de cartes) est basé sur les suites numériques et notamment sur les suites de Fibonacci.

## Informatique

---

En méthodologie scrum, la suite de Fibonacci est utilisée pour chiffrer les développements lors du planning poker. <sup>[réf. nécessaire]</sup>

## Curiosité

---

La suite de Fibonacci peut servir à effectuer des conversions de milles américains en kilomètres <sup>[réf. nécessaire]</sup>. En effet,  $1 \text{ mi} = 1,609 \text{ km}$ , or le nombre d'or  $\varphi \approx 1,6$  et  $F_{n+1} \approx \varphi F_n$ , donc on a la relation approchée  $F_n \text{ mi} \approx F_{n+1} \text{ km}$ .

Par exemple,  $3 \text{ mi} \approx 5 \text{ km}$  (en réalité 4,83 km),  $5 \text{ mi} \approx 8 \text{ km}$  (en réalité 8,05 km),  $8 \text{ mi} \approx 13 \text{ km}$  (en réalité 12,87 km).

Pour convertir des distances ne correspondant pas aux nombres de Fibonacci, on peut additionner plusieurs relations ou multiplier par une constante adéquate.

Par exemple,  $3 \text{ mi} \approx 5 \text{ km}$  donc, en multipliant par 2,  $6 \text{ mi} \approx 10 \text{ km}$ . De même,  $5 \text{ mi} \approx 8 \text{ km}$  donc, en multipliant par 10,  $50 \text{ mi} \approx 80 \text{ km}$ .

## Notes et références

---

**(en)** Cet article est partiellement ou en totalité issu de l’article de Wikipédia en anglais intitulé « Fibonacci number (http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci\_number?oldid=60447654) » (voir la liste des auteurs (https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci\_number?action=history)).

- Edouard Lucas, *Théorie des nombres*, 1891 (lire en ligne (https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29021h)), p. 3.
- (en)** Miklos Bona, *Walk Through Combinatorics, A: An Introduction To Enumeration And Graph Theory*, Wspc, 9 mai 2011 (ISBN 978-981-4460-00-2)
- (en)** Susantha Goonatilake, *Toward a Global Science: Mining Civilizational Knowledge*, Indiana University Press, 1998, p. 126 (https://books.google.fr/books?id=SI5ip95BbgEC&pg=PA126).



4. (en) Jayant Shah, A history of Pingala's combinatorics (<https://web.northeastern.edu/shah/papers/Pingala.pdf>), Northeastern University, Boston, p. 38.
5. Pour la version latine, voir ce document (<http://lhldigital.lindahall.org/cdm/compoundobject/collection/math/id/8734/rec/49>) p. 283-284 et pour la traduction, ce recueil d'extraits ([http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/analyse\\_fibonacci.pdf](http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/analyse_fibonacci.pdf)) par Jérôme Gavin et Alain Schärli, p. 11.
6. J. Binet, « Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies, d'un ordre quelconque, à coefficients variables », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*, vol. 17, 1843, p. 559-567 (lire en ligne (<http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-2976&I=567&M=tdm>)).
7. E326 (<http://eulerarchive.maa.org/pages/E326>), *Opera Omnia*, série 1, vol. 15, p. 50-69.
8. Cet exemple de la théorie développée dans (1a) Abraham de Moivre, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, 1730 (lire en ligne (<http://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/1256118>)), p. 26-42, est détaillé par (en) John Stillwell, *Mathematics and Its History* [détail des éditions] (p. 192-194 ([https://books.google.com/books?id=3bE\\_AAAAQBAJ&pg=PA192](https://books.google.com/books?id=3bE_AAAAQBAJ&pg=PA192)) sur Google Livres) comme outil de la seconde preuve de la formule « de Binet », indépendante de la première, publiée par Daniel Bernoulli deux ans auparavant.
9. (1a) J. Kepler, « Strena seu de nive sexangula (<http://www.thelatinlibrary.com/kepler/strena.html>) », 1611.
10. Richard André-Jeannin, « Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes », *C. R. Acad. Sci. Paris, I Math.*, vol. 308, 1989, p. 539-541 (lire en ligne (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5686125p/f9.image>)).
11. Voir (en) Eric W. Weisstein, « Reciprocal Fibonacci Constant (<http://mathworld.wolfram.com/ReciprocalFibonacciConstant.html>) », sur *MathWorld*, ainsi que la suite A079586 de l'OEIS (développement décimal) et A079587 (fraction continue).
12. (en) Roger Cuculière, « Problem E2922 », *Amer. Math. Monthly*, vol. 89, n° 1, 1982, p. 63 (JSTOR 2321000 (<https://jstor.org/stable/2321000>)) et (en) « Solution to Problem E2922 », *ibid.*, vol. 91, n° 7, 1984, p. 438 (JSTOR 2323005 (<https://jstor.org/stable/2323005>)).
13. (en) Catalin Badea, « A theorem on irrationality of infinite series and applications », *Acta Arithmetica*, vol. 63, 1993, p. 313-323 (lire en ligne (<http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa63/aa6342.pdf>)).
14. (en) M. Werman et D. Zeilberger, « A bijective proof of Cassini's Fibonacci identity », *Discrete Math.*, vol. 58, n° 1, 1986, p. 109 (DOI 10.1016/0012-365X(86)90194-9 (<https://dx.doi.org/10.1016/0012-365X%2886%2990194-9>), MR 0820846 (<https://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0820846>)).
15. (en) Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou et Umesh Vazirani, *Algorithms*, McGraw-Hill, 2008.
16. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest et Clifford Stein, *Introduction à l'algorithmique*, 1176 p., Section 31.2.
17. Cf. discussion à la fin de l'exercice 0.4 de Dasgupta, Papadimitriou et Vazirani 2008.
18. (en) « <https://www.geeksforgeeks.org/tail-recursion-fibonacci/> » (<https://www.geeksforgeeks.org/tail-recursion-fibonacci/>), sur *geeksforgeeks.org*.
19. Voir par exemple l'évaluation similaire de la factorielle.
20. (en) Antony J. T. Davie, *Introduction to Functional Programming Systems Using Haskell*, Cambridge University, coll. « Cambridge Computer Science Texts », 1992 (lire en ligne (<https://books.google.com/books?id=OPFoJZeI8MEC&pg=PA135>)), chap. 7 (« Lazy evaluation »), Section 7.3 : Streams.
21. « The Fibonacci Quarterly (<https://www.fq.math.ca/>) », sur *www.fq.math.ca* (consulté le 7 février 2023)



22. Pour une preuve combinatoire, voir (en) Arthur T. Benjamin et Jennifer J. Quinn, *Proofs that Really Count : The Art of Combinatorial Proof*, MAA, 2003 (lire en ligne (<https://books.google.com/books?id=ovUwGLm2IJE&pg=PA4>)), p. 4.
23. Pour une preuve combinatoire, voir Benjamin et Quinn 2003, p. 8.
24. Plus généralement, toute suite de Lucas  $U(P, Q)$  est à divisibilité faible.
25. Pour une preuve combinatoire, voir Benjamin et Quinn 2003, p. 11.
26. Plus généralement, dans tout anneau intègre à PGCD, une suite de Lucas  $U(P, Q)$  est à divisibilité forte si (et seulement si) ses paramètres  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux.
27. Car deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.
28. Pour une preuve combinatoire, voir Benjamin et Quinn 2003, p. 2-3. On peut aussi obtenir les deux premières égalités par somme télescopique, et en déduire la troisième en les additionnant, de façon différente suivant la parité de  $n$  : voir par exemple [cet exercice corrigé](#) sur Wikiversité.
29. Voir (en) Steven Vajda, *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section*, Dover, 2008 (1<sup>re</sup> éd. 1989) (lire en ligne (<https://books.google.com/books?id=KkLFBQgYfdgC&pg=PA68>)), p. 68-69.
30. (en) Bala Sury, « Trigonometric expressions for Fibonacci and Lucas Numbers », *Acta Math. Univ. Comenianae*, vol. 79, n<sup>o</sup> 2, 2010, p. 199-208 (lire en ligne ([https://www.emis.de/journals/AMUC/\\_vol-79/\\_no\\_2/\\_sury/sury.pdf](https://www.emis.de/journals/AMUC/_vol-79/_no_2/_sury/sury.pdf))).
31. (en) T. Lengyel, [The order of the Fibonacci and the Lucas numbers](http://www.fq.math.ca/Scanned/33-3/lengyel.pdf) (<http://www.fq.math.ca/Scanned/33-3/lengyel.pdf>), *Fibonacci Quarterly*, 1995.
32. (en) Paulo Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, New York, Springer, 1996 (ISBN 0-387-94457-5), p. 64.
33. (en) Franz Lemmermeyer, *Reciprocity Laws*, New York, Springer, 2000 (ISBN 3-540-66957-4), ex. 2.25-2.28, p. 73-74.
34. (en) Thomas Jeffery et Rajesh Pereira, [Divisibility Properties of the Fibonacci, Lucas, and Related Sequences](https://www.hindawi.com/journals/isrn/2014/750325/) (<https://www.hindawi.com/journals/isrn/2014/750325/>), 2013.
35. Voir les suites [A005478](#) et [A001605](#) de l'OEIS pour plus de termes de cette sous-suite et de ses indices.
36. Voir propriété 7.
37. (en) Victor H. Moll, *Numbers and Functions : From a Classical-experimental Mathematician's Point of View*, AMS, 2012 (lire en ligne (<https://books.google.com/books?id=koRPfGJUntgC&pg=PA113>)), p. 113, reproduit dans « Infinitude of Primes - via Fibonacci Numbers (<http://www.cut-the-knot.org/proofs/FibonacciPrimes.shtml>) », sur *Cut The Knot*.
38. (en) D. Avis et V. Chvátal, « Notes on Bland's pivoting rule », dans *Polyhedral Combinatorics: Dedicated to the memory of D.R. Fulkerson*, Springer, coll. « Mathematical Programming Studies », 1978 (ISBN 978-3-642-00790-3, DOI 10.1007/bfb0121192 (<https://dx.doi.org/10.1007/bfb0121192>), lire en ligne (<https://doi.org/10.1007/BFb0121192>)), p. 24-34
39. (en) T.C. Scott et P. Marketos, « On the Origin of the Fibonacci Sequence », *MacTutor History of Mathematics archive*, University of St Andrews, mars 2014 (lire en ligne (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Publications/fibonacci.pdf>)).
40. (en) Donald Knuth (2008-12-11), « Negafibonacci Numbers and the Hyperbolic Plane », *Annual meeting, The Fairmont Hotel, San Jose, CA: The Mathematical Association of America*.
41. Martin Gardner, *The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Vol. II, Simon and Schuster, 1961, p. 101
42. (en) Mario Livio, *The Golden Ratio : The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number Paperback*, Broadway Books; Reprint edition, 23 septembre 2003, 294 p. (ISBN 978-0-7679-0816-0).

43. (en) Yafei Zhao *et al.*, « Evolutionary Co-Option of Floral Meristem Identity Genes for Patterning of the Flower-Like Asteraceae Inflorescence », *Plant Physiology*, vol. 172, n° 1, septembre 2016, p. 284-296 (DOI [10.1104/pp.16.00779](https://doi.org/10.1104/pp.16.00779) (<https://dx.doi.org/10.1104/pp.16.00779>)).
44. (en) Brousseau, A, « Fibonacci Statistics in Conifers », *Fibonacci Quarterly*, vol. 7, 1969, p. 525–532 (lire en ligne (<https://www.fq.math.ca/Scanned/7-5/brousseau1.pdf>)).
45. (en) S.L. Basin, « The Fibonacci sequence as it appears in nature », *The Fibonacci Quarterly*, vol. 1, n° 1, 1963, p. 53–56 (lire en ligne (<https://www.fq.math.ca/Scanned/1-1/basin.pdf>)).
46. C. Pasquet, « Du nombre d'or à la Section d'or », *Dossier de l'Art*, n° 257, mars 2018, p. 70-71.
47. Seligman, qui recueille l'héroïne, est adepte de pêche à la ligne, de Bach et de la suite de Fibonacci selon Libération ([http://next.liberation.fr/cinema/2013/12/30/nymphomaniac-un-coup-pour-rien\\_969764](http://next.liberation.fr/cinema/2013/12/30/nymphomaniac-un-coup-pour-rien_969764))
48. Détails et explications dans l'article «Nymphomaniac», un film fourré aux mathématiques (<http://www.slate.fr/story/81925/nymphomaniac-mathematiques>) de Thomas Messias sur *Slate*
49. « X + Y Review [TIFF 2014] (<http://wegotthiscovered.com/movies/x-y-review-tiff-2014/>) » (consulté le 13 juin 2015)
50. (en) Christopher diCarlo, *Interview with Maynard James Keenan* [lire en ligne ([http://www.cdicalo.com/paper\\_04maynard.htm](http://www.cdicalo.com/paper_04maynard.htm))].
51. Voir la liste des chansons de l'album sur la boutique en ligne ([http://www.sonia-grimm-boutique.com/-ses-cd-albums/a2-un-petit-lapin-/product\\_info.php/cPath/21/products\\_id/28](http://www.sonia-grimm-boutique.com/-ses-cd-albums/a2-un-petit-lapin-/product_info.php/cPath/21/products_id/28)) de l'artiste.
52. (en) Ernő Lendvai, *Béla Bartók: An Analysis of His Music — With an Introduction by Alan Bush*, Kahn & Averill, 1971 (ISBN 978-0-900707-81-0).
53. Voir par exemple (en) Gareth E. Roberts, « The Bartók Controversy (<http://mathcs.holycross.edu/~groberts/Courses/Mont2/Handouts/Lectures/Bartok-web.pdf>) », 2015.
54. Sven Sterken, « Iannis Xenakis, Ingénieur et Architecte. p122 ([http://lib.ugent.be/fulltxt/RUG01/000/840/651/RUG01-000840651\\_2010\\_0001\\_AC.pdf](http://lib.ugent.be/fulltxt/RUG01/000/840/651/RUG01-000840651_2010_0001_AC.pdf)) » [PDF], 2004
55. [http://s1.lprs1.fr/images/2016/11/15/6332622\\_the-cure007.jpg](http://s1.lprs1.fr/images/2016/11/15/6332622_the-cure007.jpg)
56. « Mes échecs et mes réussites forment la suite de Fibonacci (<https://genius.com/35731132/Damiano-fibonacci/Mes-echecs-et-mes-reussites-forment-la-suite-de-fibonacci>) », sur *Genius* (consulté le 8 août 2025)

## Voir aussi

---

## Bibliographie

---

- (en) Hrant Arakelian, *Mathematics and History of the Golden Section*, Logos 2014, 404 p. (ISBN 978-5-98704-663-0) (rus.)
- (en) J. H. Halton, « On the divisibility properties of Fibonacci numbers », *Fibonacci Quarterly*, vol. 4, n° 3, 1966, p. 217-240 (lire en ligne (<http://www.fq.math.ca/Scanned/4-3/halton.pdf>))
- Nikolai Vorobiev (en), *Caractères de divisibilité — Suite de Fibonacci*, coll. Initiation aux Mathématiques, Éditions Mir, Moscou, 1973
- Ronald Graham, Donald Knuth et Oren Patashnik (trad. Alain Denise), *Mathématiques concrètes : Fondations pour l'informatique*, Paris, Vuibert, 2003, 2<sup>e</sup> éd., xiv+688 (ISBN 978-2-7117-4824-2), § 6.6 p. 309.

## Articles connexes

---

- Généralisations de la suite de Fibonacci
- Liste de pages en rapport avec la suite de Fibonacci

- Mot de Fibonacci
- Codage de Fibonacci
- *The Fibonacci Association*

## Liens externes

---

- (en) Eric W. Weisstein, « Fibonacci Sequence (<http://mathworld.wolfram.com/FibonacciSequence.html>) », sur *MathWorld*
- (en) Eric W. Weisstein, « Fibonacci Q-Matrix (<http://mathworld.wolfram.com/FibonacciQ-Matrix.html>) », sur *MathWorld*
- Suite de Fibonacci et nombre d'or dans l'ensemble de Mandelbrot (<http://framy.free.fr/fibonacci%20dans%20mandelbrot.htm>)
- Suite de Fibonacci dans le dictionnaire des nombres (<http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvm/literation/Fibonacci.htm>)
- J.-C. Michel, « Le nombre d'or ([http://www.gecif.net/articles/mathematiques/nombre\\_d\\_or/](http://www.gecif.net/articles/mathematiques/nombre_d_or/)) », sur *gecif.net*
- (en) R. N. Knott et the Plus Team, « The life and numbers of Fibonacci (<http://pass.maths.org.uk/issue3/fibonacci/index.html>) », sur *plus.maths.org*, 4 novembre 2013
- Benoît Rittaud, « Les suites de Fibonacci aléatoires (<https://www.dailymotion.com/video/x839eq5>) », sur *Daylymotion*, Universcience
- Notices d'autorité : BnF (<https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb122868243>) (données (<https://data.bnf.fr/ark:/12148/cb122868243>)) · LCCN (<http://id.loc.gov/authorities/sh85048028>) · Israël (<https://www.nli.org.il/en/authorities/987007531248505171>) · Tchèque ([https://aleph.nkp.cz/F/?func=find-c&local\\_base=aut&ccl\\_term=ica=ph117552](https://aleph.nkp.cz/F/?func=find-c&local_base=aut&ccl_term=ica=ph117552))